现代数学译丛

微分方程在平面上定义的曲线

（法国） [illegible] 著

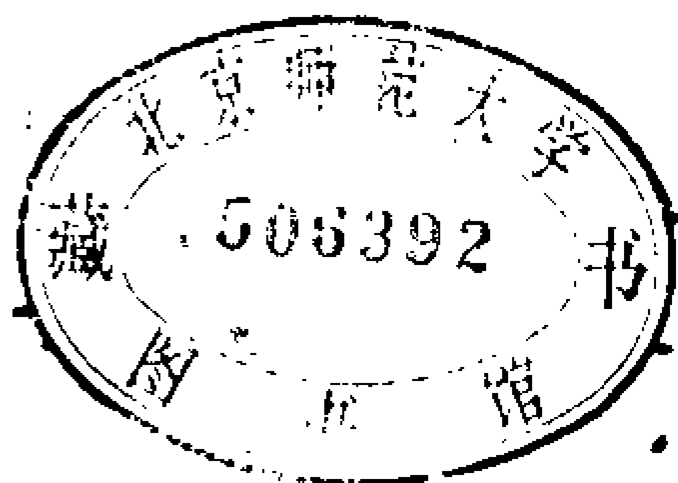
科学出版社

现代数学译丛

微分方程在平面上定义的曲线

〔巴西〕J. 索托梅约尔 著

蓝立人 译



科 学 出 版 社

1989

内 容 简 介

本书论述微分方程平面定性理论。全书共分四章：基本理论，多项式系统极限环，结构稳定性及分枝理论。本书篇幅不大，但内容比较丰富。与同类书籍不同，此书能使熟悉平面定性理论的读者尽快深入有关课题，开展具体的科研工作。

附录系苏联微分方程复域理论权威之一——Ю.С.伊里雅申科近年来为实域与复域解析理论所作的总结，其内容几乎涉及苏联学派复域工作的所有重要方面。

读者对象为大学数学系高年级学生、研究生、教师和有关的研究工作者。

J. Sotomayor
CURVAS DEFINIDAS POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NO PLANO
Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 1981

现代数学译丛
微分方程在平面上定义的曲线
〔巴西〕J.索托梅约尔 著
盛立人 译
责任编辑 吕虹 张鸿林
科学出版社 出版
北京市东黄城根北街16号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1989年4月第一版 开本：850×1168 1/32
1989年4月第一次印刷 印张：4 5/8
印数：0001—2,410 字数：117,000

ISBN 7-03-001000-0/O·242

定价：4.50元

序

本书系作者应第十三届全巴西数学会议之约而写，已作为教育部颁行教材的一本参考书．目的是引导读者进一步熟悉微分方程的基础知识．为此，在第一章里，我们只是限于汇集微分方程定性理论的一些基础材料，同时也不乏引进一些正在发展中的新内容．

我们还作了些努力，使本书内容尽量避免与一些声望卓著的著作有过多的重复．书中许多地方参考了 M．Peixoto 的《微分方程几何理论》以及 J.Palis 与 W．Melo 的《动力体系引论》．

由于教学计划的限制，本书应是一本初等材料，因此我们的重点只能限于讨论极限环与分枝性这样一些经典课题．然而，不论从研究的或是应用的角度来看，这些内容的重要性都是毋庸置疑的．

本书另一个内容是结构稳定性理论．它与前面的内容不同，限制在平面情形讨论它的基本理论，可以使我们的陈述既清晰又完整．因此我们选择了M．M.Peixoto 及 M.C.Peixoto——他们两位为微分方程结构稳定理论贡献了先驱者的才华——的陈述方式，以便把结构稳定性与它的通有性协调地结合起来．

作　　者

1981年5月30日于里约热内卢

目　　录

附录　实平面与复平面上微分方程的奇点与极限环

Ю.С.伊里雅申科(Ильяшенко)

绪　言

微分方程定义的曲线的整体研究，最早应追溯到 H. Poincaré 在 1881 年发表的论文：《微分方程定义的曲线》. 正是在那篇文章里，Poincaré奠定了微分方程定性理论的思想基础，同时给出了一系列有名的结果. 实际上，一百年来新问题的不断涌现，以及形形色色分支的形成，更使这一理论具有无可否认的重要性.

本书可视为微分方程定性理论的一个导引. 我们在本书中讨论下面三个课题：极限环、结构稳定性和分枝.

第一章是定性理论基本知识的重述，其中包括描述形为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

的方程组解的渐近动态的 Poincaré-Bendixson 定理.

我们还将重述解在一个双曲奇点(焦点、结点、鞍点)邻域中的结构，以及更一般的，解在一极限环邻域中的结构.

一个极限环是指(1)的这样一种周期解或周期轨线：它们首先是孤立的. 其次，当时间增加或减少时，每一充分邻近的轨线将螺状盘近此轨线.

在上述论文中，就 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 是多项式的方程(1)，对极限环的定位问题和个数问题，Poincaré表示了特别的关注. 以原始的 Poincaré-Bendixson 定理及双曲奇点的局部结构为线索，Poincaré的研究工作导致如下的有限性定理：在"一般情况"下，(1)型的多项式系统具有有限个极限环. 注意，"一般情况"一语，根据 Poincaré 的研究，应是指"通有情况"(generico)；

目下流行的说法是，指出一种所谓"例外情况"，其时一个（1）型方程系数的微小扰动就能使定理的结论不再成立；而其余的情况才称为"一般情况"。

本书第二章将致力于证明 Poincaré 极限环有限性定理的一个更精确的变形定理．Poincaré 的假设在于消除某些奇闭轨线的出现．这种奇闭轨线可称之为图，它们是由鞍型奇点及联结它们的轨线（分界线）组成的集合．由本书的变形定理则可推出，所有"例外情况"的向量场，即具有奇闭轨线的向量场，将包含于一些狭小的解析流形的可数并集之内，而所谓狭小集，其意义即为零测度集．

本书发展的另一个变形定理，将适合于一类被称为单图的奇闭轨线，对此我们研究甚详．在应用这个变形定理时，验证假设是否成立，取决于一些多项式函数的代数运算；但如果验证 Poincaré 的使奇闭轨线不存在的假设，则将取决于一些纯解析运算．

关于平面多项式系统极限环的有限性问题，就其发展情况而言，远未达到圆满的地步，即使是 Dulac 的著名工作《论极限环》（1923）——此文首次给出多项式系统（1）的有限性定理（毋宁说，这个结论是在奇点为双曲的且无图的假设下得到的）——照我们看来，仍然不能导出这一令人注目的结论．事实上，在 Dulac 的论文中已经发现一处讨论甚为含混的漏洞．还应注意，Dulac 的方法又可用于（$P(x,y)$，$Q(x,y)$）为解析的情况，即可用于有孤立奇点的系统（1）．

另一方面，由 Hilbert 提出的，关于极限环个数的界限应是 $P(x,y)$，$Q(x,y)$的次数 g 的函数的所谓第十六问题（1900），即使对 $g=2$ 的情形，至今仍为一未解决的问题．例如，史松龄给出的例子（1980）说明，此数大于或等于四[1]．

在第三章中，我们将对一个具有光滑边界 ∂M 的平面域 M，致力于 C^r 类微分组（1）（或向量场 $X=(P,Q)$）的结构稳定性

1） 我国已故女数学家王明淑曾同时独立地给出另一反例．——译者注

研究.

我们讨论的系统具有这样的特征. 它们在M中的相图,在系统的分量(即函数 P 及 Q)微小扰动时,定性上将不发生变化.

为行文上的方便,强调不拘形式而改变一下观点是有好处的;这样一来,例如,我们就可以采用 Poincaré-Dulac 的工作中的一个漂亮的想法. 相图的整体研究立足于用来定义系统的函数 P 及 Q 的类. 因此,在研究结构稳定时,我们应当去寻找一类相当坚实的相图,以便在定性上,抵御函数 P 及 Q 的一个 C^r 类扰动.

我们关于结构稳定的陈述是根据 M. C. Peixoto 和 M. M. Peixoto 导出的一个变形定理(1959). 比起 A. Андронов 和 Л. Понтрягин 最初给出的定理(1937),这个变形定理提供了根本性的推广.

一旦理解了结构稳定系统的集 Σ^r——对这些系统,我们将用它们的基本元素(奇点、周期轨线和分界线)加以刻划——在所有 C^r 类系统的空间 $\mathfrak{X}^r$ 中具有开集性质以及稠密性质(这是整个第三章将要证明的结果),则对于依赖于参数的系统族

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=P(x,y,\lambda), \\ \dfrac{dy}{dt}=Q(x,y,\lambda) \end{cases} \tag{1_λ}$$

关于其相图结构的(分枝)变化问题,我们也就有了一个出发点. 唯有对于使系统落入结构稳定系统集的余集 $\mathfrak{X}_1^r=\mathfrak{X}^r-\Sigma^r$ 的那些值 λ (称之为分枝值),这种结构上的变化才会发生.

第四章开始对定义于平面紧域 M 上的,依赖于实单参数λ的族(1_λ),进行系统的研究.

我们的讨论只限于结构稳定分枝的情形. 对于这样的系统,其基本性质将不因族的,即函数 $P(x,y,\lambda)$和 $Q(x,y,\lambda)$的微小扰动而有所改变.

将(1_λ)视为 $\mathfrak{X}^r$ 中一条曲线,我们利用(1_λ)关于 $\mathfrak{X}_1^r$ 中的一个余维为一的光滑子流形 Σ_1^r 的匀断性的办法,获得这种分枝性的

一个刻划. 我们将证明，只具有稳定性分枝的系统族(1_λ)，构成一个开稠集.

上述结论，实际上是作者得到的关于紧流形上一个普遍结果在平面情形的复述. 但这一结果却已成为 Андронов 及 Леонтович 的工作(1938)的一个实质性推广；后者则是苏联同行们开创的，将$\mathscr{X}^r$的微小扰动限制于空间$\mathscr{X}_1^r$内的结构稳定分枝研究(也可称为一阶结构稳定性).

应当注意的是，本书所给的结论，与 Андронов 及 Леонтович 所给的陈述之间，存在一种重要的概念差异. 当我们限制在一阶结构稳定的族Σ'而导出分枝性时，通常这种稳定分枝值均为孤立的. 但对于Σ'所进行的讨论却能使我们重新描述稳定分枝值(它将成为上述分枝值的自然极限)，以便又一次刻划每一可能的稳定分枝值. 因此我们以为，对于Σ_1^r和Σ_1^r的稳定分枝性这两个概念之间的关系，在第四章已被满意地作了说明.

即使对于平面情形，关于多参数微分方程分枝的系统研究，也远未达到令人满意的地步. 对双参数情形，第四章采用的方法是一条可以遵循的途径，可望在那里出现一些新的、本质的情况.

为使行文事出有据，每章之末均列出与讨论课题有关的原始参考文献.

第一章　定性理论基础

本章限于陈述正文将用到的，有关微分方程定性理论的基本结果.有关这方面的详细讨论,可见[S]的第三部分.

§1. 向量场与流

设 Δ 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开子集. 一个 Δ 上的 C^r 向量场($1\leqslant r\leqslant\infty$或 $r=\omega$)， 是指一个 C^r 类映射 X: $\Delta\to\mathbb{R}^n$;换言之,当 $r<\infty$ 或 $r=\infty$ 时,X 的 r 阶为止的偏导数在 Δ 上存在且连续;当 $r=\omega$ 时,则 X 是 Δ 上的一个解析场,即 X 在 Δ 的任一点的 Taylor 展式,在此点邻域内一致收敛于 X.

一个向量场将关联一个微分方程

$$\frac{dx}{dt}=X(x), \tag{1}$$

反之也如此.

方程(1) 的解,即对一切 $t\in I$ 满足

$$\frac{d\varphi}{dt}=X(\varphi(t)) \tag{2}$$

的可微映射 φ: $I\to\Delta$(I 为某一区间),又称为向量场 X 或微分方程(1) 的轨线或积分曲线.

使 $X(x)=0$ 的点 $x\in\Delta$,称为 X 的奇点;使 $X(x)\neq 0$ 的点 $x\in\Delta$,称为X的常点或正则点.

设 x 为一奇点,则 $\varphi(t)=x$, $-\infty<t<\infty$, 为(1) 的解;反之,若 $\varphi(t)=x$, $-\infty<t<\infty$,为(1) 的解,则 x 是 X 的奇点. 这是因为

$$0 = \varphi'(t) = X(\varphi(t)) = X(x).$$

一条积分曲线 φ: $I \to \Delta$ 称为极大解，如果对任一条积分曲线 ψ: $J \to \Delta$，使 $I \subseteq J$，且 $\varphi = \psi|I$，则必有 $I = J$；从而必有 $\varphi = \psi$. 在这种情形下，I 称为极大区间.

方程(1) 或(2) 具有如下的几何解释：当且仅当 t 处的速度向量 $\varphi'(t)$ 与场 X 在 $\varphi(t)$ 处的向量相重合时，φ 构成 X 的一条积分曲线(见图 1).



图 1

一个(1) 型微分方程常称为自治方程，此种方程的右端不含时间 t.

1.1 定理. 设 X 是一 C^r 类向量场，$1 \leqslant r \leqslant \infty$ 或 $r = \omega$. 则：

a)(极大解的存在与唯一性). 对每一 $x \in \Delta$，存在一个开区间 I_x，在其上可定义(1) 的唯一极大解 φ_x，使 $\varphi_x(0) = x$；

b) (群性质). 设 $y = \varphi_x(t)$, $t \in I_x$. 则必 $I_y = I_x - t = \{r - t;\ r \in I_x\}$；且对每一 $s \in I_y$，$\varphi_y(s) = \varphi_x(t+s)$；

c)(初始条件的正则依赖性). 集 $D = \{(t, x);\ x \in \Delta, t \in I_x\}$ 应是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的开集. 于是，依 $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ 定义的映射 φ: $D \to \mathbb{R}^n$ 在 D 上为 C^r 类，$1 \leqslant r \leqslant \infty$ 或 $r = \omega$. 此外，对每一 $(t, x) \in D$，φ，满足方程

$$D_1 D_2 \varphi(t, x) = DX(\varphi(t, x)) \cdot D_2 \varphi(t, x),$$

其中 D_i, $i = 1, 2$，表示关于第 i 变量的偏导数.

证明. 参阅[S, p211—239]. 应注意此证明当 $\mathbb{R}^n$ 改为一Bana-

ch 空间时，仍有效. ∎

对于依赖于单参数的方程

$$\frac{dx}{dt}=X(x,\lambda), \tag{1_λ}$$

其中 λ 在一Banach 空间的开集 Λ 上取值，又 X: $\Delta\times\Lambda\to E$ 为 C^r 类，可视之为

$$\frac{d}{dt}(x,\lambda)=(X(x,\lambda),0).$$

由上述讨论可知，我们得到一个 C^r 映射 φ: $\tilde{D}\to E$，其中 $\tilde{D}$ 为 $R^r\times\Delta\times\Lambda$ 中的开集，且使

$$D_1\varphi(t,x,\lambda)=X(\varphi(t,x,\lambda),\lambda),$$

$$D_1D_3\varphi(t,x,\lambda)=D_1X(\varphi(t,x,\lambda),\lambda)\cdot D_3\varphi(t,x,\lambda)$$
$$+D_2X(\varphi(t,x,\lambda),\lambda).$$

下面讨论各种应用时，常常将场 X 本身也当作 C^r 类向量场的 Banach 空间 $\mathscr{X}^r$ 中的一个参数. 于是，$\varphi(t,x,X)$ 在$R\times\Delta\times\mathscr{X}^r$ 的开集上应为 C^r 类.

1.2 **定义**. 映射 φ: $D\to\Delta$ 称为 X 生成的流.

注意 C^r 类流的定义的条件应为 $\varphi(0,x)=x$ 及 $\varphi(t+s,x)=\varphi(t,\varphi(s,x))$，但这进一步的条件只有在定理 1.1 的条件 b)成立时才满足. 显然，如对每一x，$I_x=\mathbb{R}$，则由 X 生成的流即为一 Δ 上的 C^r 类流. 反之，常有 $I_x\neq\mathbb{R}$. 在这种情况下，X 生成的流常称为由 X 生成的局部流或者局部单参群. 借用这一名称，是因为当 $D=\mathbb{R}\times\Delta$ 时，定理 1.1 的条件 b)定义了一个实数加群映入 Δ 上 C^r 微分同胚(取合成运算)的群的同态映射；也就是说，取 $\varphi_t(x)=\varphi(t,x)$而定义的同态 $t\to\varphi_t$，则 $\varphi_{t+s}=\varphi_t\circ\varphi_s$，$\varphi_{-t}=\varphi_t^{-1}$. 于是这就表示，$\Delta$ 的点沿 X 的轨线流动的像，相当于流体的质点沿流线流动的像.

1.3 **推论**. 令 X 为一 C^r 向量场，$r\geqslant 1$，且 $\Delta\subseteq\mathbb{R}^n$. 令 $x\in\Delta$，又 $I_x=(\omega_-(x),\omega_+(x))$，使 $\omega_+(x)<\infty$(或 $\omega_-(x)>-\infty$)，则当 $t\to\omega_+(x)$时(或 $t\to\omega_-(x)$时)，$\varphi_x(t)$趋于 $\partial\Delta$；换言之，对任一

紧子集 $K\subseteq\Delta$，存在 $\varepsilon=\varepsilon(K)>0$，使得对 $t\in(\omega_+(x)-\varepsilon,\ \omega_+(x))$（或 $t\in(\omega_-(x),\omega_-(x)+\varepsilon)$），有 $\varphi_x(t)\notin K$.

证明. 设不然，则存在一个紧子集 $K\subseteq\Delta$ 及一个数列 $t_n\to\omega_+(x)<\infty$，使得对任一n，$\varphi_x(t_n)\in K$. 必要时改取其子列，可设 $\varphi_x(t_n)$收敛于一点 $x_0\in K$. 取 $b>0$ 及 $a>0$ 使 $B_b\times I_a\subseteq D$，其中 $B_b=\{y\in\mathbb{R}^n;\ |y-x_0|\leqslant b\}\subseteq\Delta$，且 $I_a=\{t\in\mathbb{R};|t|<a\}$. 今依定理 1.1 条件 c)，$D$ 为开的；依条件 b)，$\varphi_x(t_n+s)$对 $s<a$ 有定义，且当 n 甚大时，与 $\varphi_y(s)$ 相等，其中 $y=\varphi_x(t_n)$. 由此推出 $t_n+s>\omega_+(x)$. 矛盾. ∎

1.4 **推论**. 设 φ 是(1)的在一极大区间 I 上定义的解，且 $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$，对 $t_1\neq t_2$. 则 $I=\mathbb{R}$，且对每一t，$\varphi(t+c)=\varphi(t)$，其中 $c=t_2-t_1$. 也就是说，φ 为周期映射

证明. 依 $\psi(t)=\varphi(t-c)$定义 ψ: $[t_2,t_2+c]\to\mathbb{R}^n$. 则 $\psi'(t)=\varphi'(t-c)=X(\varphi(t-c))=X(\psi(t))$，且 $\psi(t_2)=\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$. 由解的唯一性可知，$[t_2,\ t_2+c]\subseteq I$，且 $\varphi(t)=\varphi(t+c)$，当 $t\in[t_1,t_2]$ 时. 重复此过程可知 $I=\mathbb{R}$，且对每一$t\in\mathbb{R}$，$\varphi(t+c)=\varphi(t)$. ∎

§ 2. 向量场的相图

2.1 **定义**. 集合 $\gamma_p=\{\varphi(t,p);t\in I_p\}$，即 X 的过 p 点的积分曲线的像，称为 X 的过 p 点的**轨道**.

应注意，$q\in\gamma_p\Longleftrightarrow\gamma_p=\gamma_q$. 事实上，如有$q\in\gamma_p$，则$q=\varphi(t_1,p)$，且 $\varphi(t,q)=\varphi(t+t_1,p)$，又 $I_p-t_1=I_q$.

换句话说，X 的两条轨道或者重合，或者不变. 也就是说，Δ 将成为可微曲线的不交并集；而且这些可微曲线的类型不外乎下面定理 2.2 中所列各款：

a) $\mathbb{R}$ 中一个区间的双射像；

b) 一个点；

c) 一个圆的微分同胚像.

对情形b)有，$p=\gamma_p$；这时轨道称为奇点；在情形c)，轨道称为闭轨道或周期轨道.

2.2 **定理.** 设φ是(1)的在I上的极大解，则它必属于下列情形之一

a) φ为一双射；

b) $I=\mathbb{R}$，且φ为常值映射；

c) $I=\mathbb{R}$，且φ为周期映射；即存在一$\tau>0$，使得对一切$t\in\mathbb{R}$，$\varphi(t+\tau)=\varphi(t)$. 又如$|t_1-t_2|<\tau$，则$\varphi(t_1)\neq\varphi(t_2)$.

证明. 见[S]. ∎

2.3 **定义.** 一个开集Δ，连同它关于X的轨道的一个分划，称为X的相图. 每一轨道依场X的积分曲线的方向而取其定向；对奇点可取任意定向.

在图上将用箭头指出正方向.

2.4 **例子.** a)现在来描述一个$\mathbb{R}^2$上的向量场$X=(P,Q)$的相图. 其中$P(x,y)=P(x)$有有限个零点，设为$a_1<a_2<\cdots<a_n$，再取$a_0=-\infty$，$a_{n+1}=\infty$，又设$Q(x,y)=-y$.

在每一区间(a_i,a_{i+1})中，$i=0,1,\cdots,n$，P具有常号. 取定一个区间(a_i,a_{i+1})，设P在其上为正. 如令$x\in(a_i,a_{i+1})$，则方程$\dfrac{dx}{dt}=P(x)$过x的解$\varphi(t,x)$在一极大区间$I_x=(\omega_-(x),\omega_+(x))$上为严格增加的.

由此即可断言：

1) 当$t\to\omega_-(x)$时，$\varphi(t,x)\to a_i$；当$t\to\omega_+(x)$时，$\varphi(t,x)\to a_{i+1}$.

设当$t\to\omega_-(x)$时，$\varphi(t,x)\to b>a_i$，则因为$\varphi(t,b)$也为严格增加的，所以γ_x必将与γ_b相交，从而必有$\gamma_x=\gamma_b$，这是矛盾的. 由此即知当$t\to\omega_-(x)$时，$\varphi(t,x)\to a_i$；同理可证当$t\to\omega_+(x)$时，$\varphi(t,x)\to a_{i+1}$.

2) 设$i\geq 1$，则必有$\omega_-(x)=-\infty$.

设反之，当每一$t\in I_x$时，有$\varphi(t,x)>a_i>-\infty$. 于是依命

题1.3，可知 $\omega_-(x)=-\infty$.

3）设 $i<n$，则必有 $\omega_+(x)=\infty$.

证明同2）.

对于 X 在区间 (a_i, a_{i+1}) 上为负的情况，读者可自行陈述且证明之.

显然，X 的流由 $\phi(t,x,y)=(\varphi(x,y), e^{-t}y)$ 给出 .见图2.

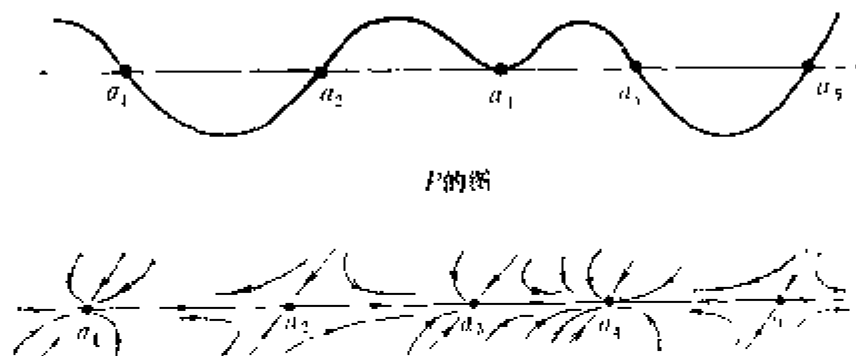


图 2

b）平面上简单二维系统.

系统
$$\frac{dx}{dt}=Ax+r(x)$$

的相图，已为人熟知，其中A为一 2 × 2 阶矩阵，而 $\Delta=\det A\neq 0$，且 r 是 $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 类函数，使 $Dr(0)=0$. 对线性系统，若 $\Delta<0$，则原点为鞍点；若 $\Delta>0$，$\sigma=\operatorname{trace}A=0$，则原点为中心；若 $\Delta>0$，$\sigma^2-4\Delta<0$，则原点为焦点；最后若$\Delta>0$，$\sigma^2-4\Delta\geqslant 0$，则原点为结点.

线性情形$r\equiv 0$）的相图如图3所示.

A的特征值是

$$\lambda_1,\lambda_2=(\sigma\pm\sqrt{\sigma^2-4\Delta})/2$$

以 E_1 及 E_2 记相应的特征空间.

对于非线性情形($r\neq 0$)，除去中心外，上述每一图形在原点邻域内均有效. 更确切地说，$\dfrac{dx}{dt}=Ax+r(x)$ 在原点(0, 0)中的相

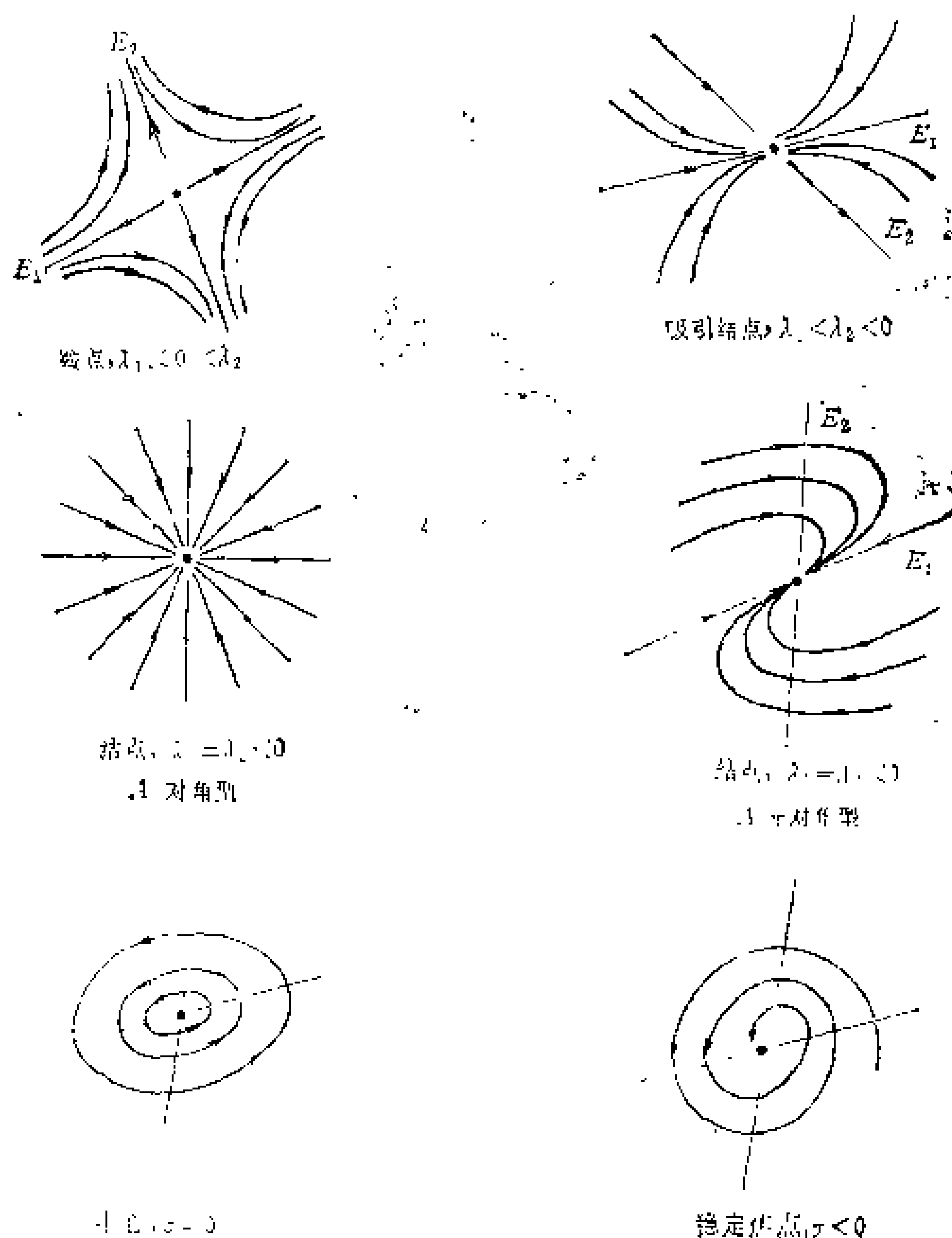


图 8

图，是$\frac{dx}{dt}=Ax$的相图在一个定义于原点邻域之中且近似于恒等映射的同胚h下的像．对于鞍点情形，非线性系统对应于$E_1-\{0\}$及$E_2-\{0\}$的四条轨线称之为鞍点分界线．它们各为E_i的像，并且是与r具有相同微分阶的曲线，且与E_i相切于原点．这个结论是我们将在第四节中给出的一个一般定理（Hartman定理）的二维陈述．对于r的微小扰动，中心型奇点将会由于不稳定而改变轨道结构；例如，若取$r=\varepsilon(x(x^2+y^2),y(x^2+y^2))$，

则对应于 $\varepsilon<0$ 或 $\varepsilon>0$，我们将分别得到吸型奇点及斥型奇点.

下面的例子将指出一种新的情况，这时同胚 h 可以整体地用显式得出.

c) 取 $X=(X_1,X_2)$ 及 $\Delta=\mathbb{R}^2$，其中 $X_1=x$ 且 $X_2=-y+x^3$. 则 X 的流由下式给出

$$\varphi(t,(a,b))=\left(ae^t,\left(b-\frac{a^3}{4}\right)e^{-t}+\frac{a^3}{4}e^{3t}\right),$$

其中 $t\in\mathbb{R}$ 且 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

令 $\psi(t,p)$ 是"鞍点"的流 $Y=(x,-y)$. 可以证明 h: $(x,y)\to\left(x,y+\frac{x^3}{4}\right)$ 满足 $h(\psi(t,p))=\varphi(t,h(p))$. 见图4.

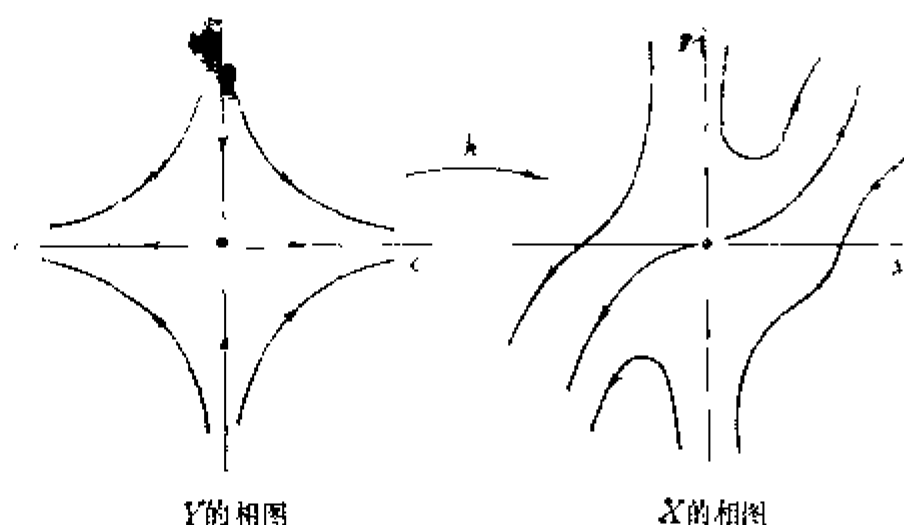


图 4

§3. 向量场的等价与共轭

我们引进两个向量场之间的等价概念，以用来比较彼此的相图.

3.1 **定义**. 设 X_1 及 X_2 各为定义于 $\mathbb{R}^n$ 中开集 Δ_1 及 Δ_2 上的向量场. 称 X_1 与 X_2 为拓扑(或 C^r 拓扑) 等价，如果存在一个同胚(或 C^r 微分同胚) h: $\Delta\to\Delta$, 将 X_1 的轨道保定向地映成 X_2 的轨线. 精确地说，设 $p\in\Delta_1$，且 $\gamma^1(p)$ 是 X_1 的一条过 p 的定向轨道，则 $h(\gamma^1(p))$ 是 X_2 的过 $h(p)$ 的定向轨道 $\gamma^2(h(p))$.

容易看出，上述定义在 $\mathbb{R}^n$ 中开集上的向量场之间建立一个等价关系．同胚 h 又称为 X_1 及 X_2 之间的拓扑（或可微）等价．

3.2 定义．设 φ_1: $D_1\to\mathbb{R}^n$ 及 φ_2: $D_2\to\mathbb{R}^n$ 分别是向量场 X_1: $\Delta_1\to\mathbb{R}^n$ 及 X_2: $\Delta_2\to\mathbb{R}^n$ 的流．称 X_1 及 X_2 为拓扑共轭(或 C^r 共轭)，如果存在一个同胚(或 C^r 微分同胚) h: $\Delta_1\to\Delta_2$，使得对一切 $(t,x)\in D_1$，有 $h(\varphi_1(t,x))=\varphi_2(t,h(x))$．

在这情形下，必有 $I_1(x)=I_2(h(x))$．同胚 h 又称为 X_1 及 X_2 之间的拓扑共轭(或 C^r 共轭)．

对于 $\mathbb{R}^n$ 中开集上定义的向量场，共轭关系更应是一等价关系．显然，每一个拓扑共轭一定是个拓扑等价．X_1 及 X_2 之间的等价将奇点映成奇点，又将周期轨道映成周期轨道；如果 h 是个共轭，则周期轨道的周期也将保持不变．

3.3 例子．a) 依 $h(x,y)=\left(x,y+\dfrac{x^3}{4}\right)$ 定义的映射 h: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，是 $X(x,y)=(x,-y)$ 及 $Y(x,y)=(x,-y+x^3)$ 之间的一个 C^r 共轭．(见上节例 2.2.)

b) 令 $A=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的矩阵，其中 $a>0$ 及 $b>0$．由系统 $\dfrac{dx}{dt}=Ax$ 及系统 $\dfrac{dx}{dt}=Bx$ 定义的中心，其周期轨道分别有周期 $2\pi/a$ 及 $2\pi/b$．若 $a\neq b$，则上述两系统不共轭．但另一方面，$\mathbb{R}^2$ 的恒等映射 $(=h)$ 为一 C^r 等价．

下面的引理提供可微共轭的一个刻划．

3.4 引理．设 X_1: $\Delta_1\to\mathbb{R}^n$ 及 X_2: $\Delta_2\to\mathbb{R}^n$ 是 C^r 向量场．又 h: $\Delta_1\to\Delta_2$ 是一 C^r 微分同胚，则当且仅当

$$Dh_pX_1(p)=X_2(h(p)),\ \forall p\in\Delta_1, \qquad (*)$$

时，h 是 X_1 及 X_2 间的共轭．

证明．令 φ_1: $D_1\to\Delta_1$ 及 φ_2: $D_2\to\Delta_2$ 分别是 X_1 及 X_2 的流．设 h 满足 $(*)$ 式．取 $p\in\Delta_1$，而令 $\psi(t)=h(\varphi_1(t,p))$，$t\in I_1(p)$．由此可知 ψ 是 $\dfrac{dx}{dt}=X_2(x)$，$x(0)=h(p)$ 的解；这是因为：

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = Dh(\varphi_1(t, p)) \cdot \frac{d}{dt}\varphi_1(t, p)$$
$$= Dh(\varphi_1(t, p))X_1(\varphi_1(t, p))$$
$$= X_2(h(\varphi_1(t, p))) = X_2(\psi(t)).$$

从而有 $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$. 反过来，设 h 为一共轭. 令 $p \in \Delta_1$, 则 $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$, $t \in I_1(p)$. 将此关系式在 $t = 0$ 时对 t 求导，即得(∗)式. ▌

3.5 **定义.** 设 X: $\Delta \to \mathbb{R}^n$ 为一 C^r 向量场，$r \geq 1$. $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开的，$A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ 也为开的，一个 C^r 映射 f: $A \to \Delta$ 称之为 C^r 场 X 的局部匀断截面，如果对每一 $a \in A$, $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ 与 $X(f(a))$ 张成空间 $\mathbb{R}^n$. 令 $\Sigma = f(A)$，且取诱导拓扑；若 f: $A \to \Sigma$ 为一同胚，则称 Σ 是 X 的匀断截面.

3.6 **注.** 设 $p \in \Delta$ 是常点，又 $\{v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}, X(p)\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基. 令 $B(0, \delta)$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的中心在原点，半径为 $\delta > 0$ 的球. 对甚小的 δ，依 $f(x_1, \cdots, x_{n-1}) = p + \sum_{i=1}^{n-1} x_i v_i$ 定义的映射 f: $B(0, \delta) \to \Delta$，便是 X 在 p 处的局部匀断截面.

3.7 **定理**(管状流定理). 令 p 是 C^r 向量场 X: $\Delta \to \mathbb{R}^n$ 的一个常点，$1 \leq r \leq \infty$ 或 $r = \omega$，又 f: $A \to \Sigma$ 是 X 的 C^r 类局部匀断面，且 $f(0) = p$. 则存在 p 在 Δ 中的一个邻域 V，一个 C^r 微分同胚 h: $V \to (-\varepsilon, \varepsilon) \times B (\varepsilon > 0)$，$B$ 是一个中心在 $Q = f^{-1}(p)$ 的 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的开球，使得

a) $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$;

b) h 是场 $X|V$ 及常值场 Y: $(-\varepsilon, \varepsilon) \times B \to \mathbb{R}^n$, $Y = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ 之间的一个 C^r 共轭.

证明. 设 φ: $D \to \Delta$ 是 X 的流. 今依 $F(t, u) = \varphi(t, f(u))$ 定义 F: $D_A = \{(t, u)$: $(t, f(u)) \in D\} \to \Delta$. 则 F 将平行线映成 X 的积分曲线. 我们证明 F 是 $(0, \bar{0}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ 处的一个局部微分同胚. 根据反函数定理，只需证明 $DF(0)$ 是一同构即可.

今存在 $\varepsilon > 0$ 以及 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的中心在原点 $\bar{0}$ 的球 B，使 $F|(-\varepsilon,$

$\varepsilon) \times B$ 是开集 $V = F((-\varepsilon, \varepsilon) \times B)$ 的微分自同胚. 取 $h = (F|(-\varepsilon, \varepsilon) \times B)^{-1}$. 可见 $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$, 这是因为 $F(0, u) = f(u) \in \Sigma$, $\forall u \in B$. 由此得证 a). 另一方面, 对每一 $(t, u) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$, h^{-1} 是 Y 及 X 之间的共轭:

$$
\begin{aligned}
&Dh^{-1}(t,u)\cdot Y(t,u) = DF(t,u)\cdot(1,0,\cdots,0)\\
&= D_1F(t,u) = X(\varphi(t,f(u))) = X(F(t,u))\\
&= X(h^{-1}(t,u)).
\end{aligned}
$$

于是依引理 3.4, 定理证毕. 见图 5. ▌

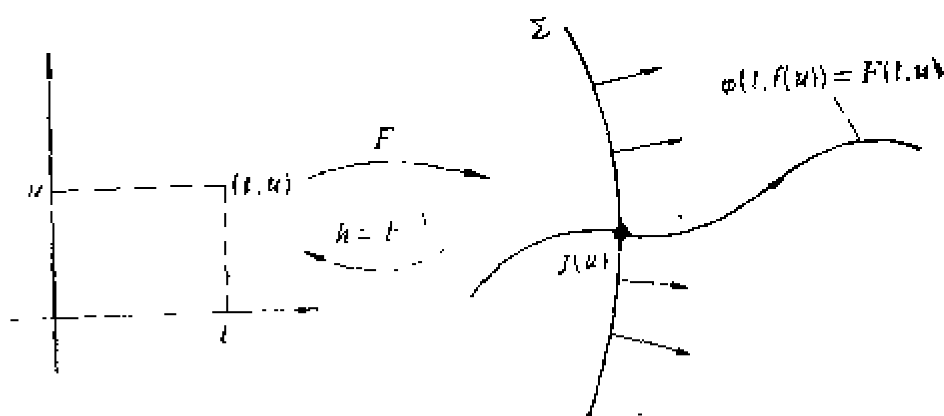


图 5

3.8 **推论**. 设 Σ 是 X 的一个匀断截面. 对每一点 $p \in \Sigma$, 存在 $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$, p 在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个邻域 V, 以及一个 C^r 函数 τ: $V \to \mathbb{R}$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$ 或 $r = \omega$, 使 $\tau(V \cap \Sigma) = 0$, 且

a) 对每一 $q \in V$, 在 $J_q = (-\varepsilon + \tau(q), \varepsilon + \tau(q))$ 上被双射地定义场 $X|V$ 的一条积分曲线 $\varphi(t, q)$;

b) $\xi(q) = \varphi(\tau(q), q) \in \Sigma$ 是 $\varphi(\cdot, q)|J_q$ 与 Σ 的唯一交点; 特别地, 当且仅当 $\tau(q) = 0$ 时, $q \in \Sigma \cap V$;

c) ξ: $V \to \Sigma$ 为 C^r 类, 且对每一 $q \in V$, $D\xi(q)$ 为满射; 此外, 当且仅当对某一 $a \in \mathbb{R}$ 有 $V = aX(q)$ 时, $D\xi(q) \cdot V = 0$.

证明. 设 h, V 及 ε 取自定理 3.7. 再令 $h = (-\tau, \eta)$. 如设场 Y 即为满足定理结论的场, 则因 h 为一 C^r 共轭, 可知 X 即满足上述论断. (见图 6.) ▌

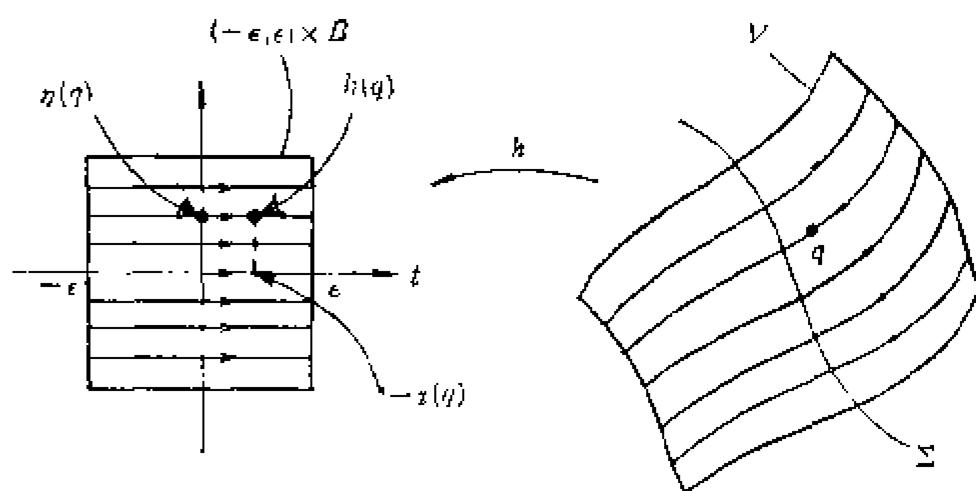


图 6

§4. 双曲奇点的局部结构

设 p 是 C^r 向量场 X 的一个非奇点，$r\geq 1$．由管状流定理可知，存在一个 C^r 微分同胚，它在 p 的一个邻域内，使场 X 与常值场 $Y=(1,0,\cdots,0)$ 共轭．因此可认为，两个场 X 及 Y 在常点附近常为局部 C^r 共轭．由这一观察，可以认为一个向量场在常点附近的局部定性知识，在相差一个局部微分共轭时，是令人满意的．

但若 p 是一奇点，则情况便十分复杂．即使是线性系统，也可能出现各种不同的可微共轭类，就 $\mathbb{R}^2$ 而言，即有鞍点、中心及结点等．

本节研究双曲奇点．

4.1 定义． 一个 C^r 类（$r\geq 1$）向量场的奇点 p 称为**双曲奇点**，如果 $DX(p)$ 的每一特征值均有非零实部．

可以证明，这个定义对于 X 在 p 处的 C^r 局部共轭，是不变的．

4.2 Hartman 定理． 令 $X: \Delta\to\mathbb{R}^n$ 是一个 C^1 向量场，又 p 是 X 的一个双曲奇点．则存在 p 在 Δ 中的一个邻域 V，以及 $\mathbb{R}^n$ 中原点的一个邻域 W，使 $X|V$ 与 $DX(p)|W$ 为拓扑共轭．

本定理的证明见[S，第四章]．我们只用下面的图（图7）提供一个几何解释．∎

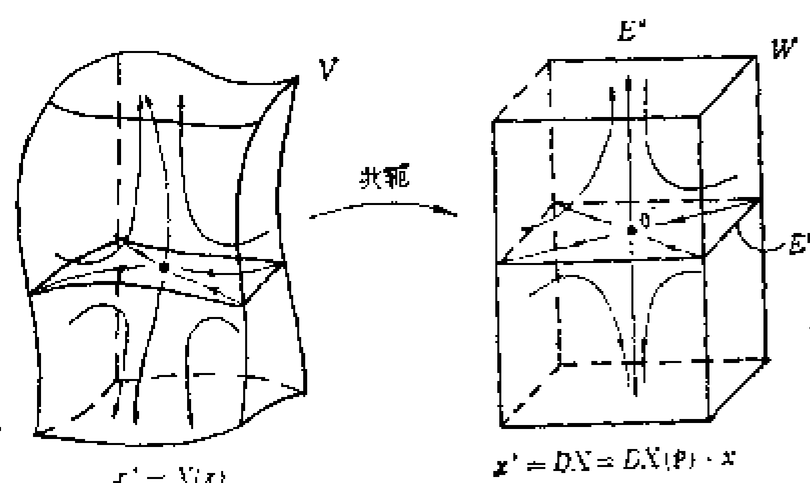


图 7

§5．周期轨道的局部结构

5.1 Poincaré 变换．

与向量场的闭轨道相关的 Poincaré 变换，是一个用下述方法定义的微分同胚；这一变换将能描述向量场在闭轨道γ的邻域中的动态．

设$\gamma=\{\varphi(t,p);0\leqslant t\leqslant\tau_0\}$是$C^r$向量场$X$的一条周期是$\tau_0$的周期轨道，定义于$\Delta\subset\mathbb{R}^n$中，又$r\geqslant 1$或$r=\omega$．命$\Sigma$是$X$在$p$处的一个匀断截面．根据$X$的流的连续性可知，对任一近于$p$的点$q\in\Sigma$，当$t$位于一事先确定的紧区间，例如$[0,2\tau_0]$中时，轨道$\varphi(t,q)$也将甚近于$\gamma$．今定义$\pi(q)$是此轨道交于$\Sigma$的第一个交点；令$\Sigma_0$是$\pi$的定义域；显然，$p\in\Sigma_0$，且$\pi(p)=p$．（见图8．）

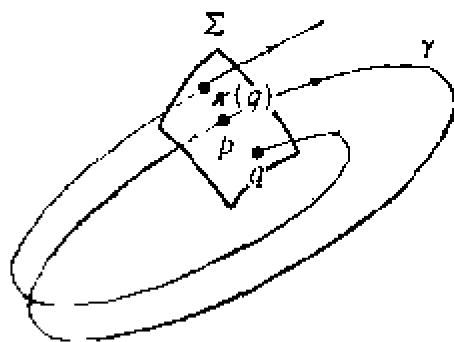


图 8

场X在γ近傍的许多性质将反映在π上，例如，X在γ的邻域内的周期轨道对应于π的周期点，即这样的点$q\in\Sigma_0$，使得对某一整数$n\geqslant 1$，有$\pi^n(q)=q$．X的轨道在γ近傍的渐近动态也

可由 π 来描述. 例如, $\lim\limits_{n\to\infty}\pi^n(q)=p$ 蕴含 $\lim\limits_{t\to\infty}d(\varphi(t,q),\gamma)=0$.

5.2 **注.** 上述截面应是一个超曲面, 或是开集 $\Delta\subseteq\mathbb{R}^n$ 的一个 $(n-1)$ 维微分子流形. 可设流形 Σ 作为 $\mathbb{R}^n$ 的向量或仿射子空间的圆盘出现, 同时用一系列限制加以构成.

以下证明, π: $\Sigma_0\to\Sigma$ 是一个 C^r 类, $r\geqslant1$ 或 $r=\omega$, 映上其像 Σ_1 的微分同胚. 为更精确地给出 π 的定义, 我们用一下管状流定理及其推论 3.8. 令 V 是推论 3.8 给出的邻域, 因 $\varphi(\tau_0,p)=p$, 故存在 p 在 Σ_0 中的一个邻域 Σ_0, 使得对一切 $q\in\Sigma_0$, $\varphi(\tau_0,q)\in V$. 再设 ξ: $V\to\Sigma$ 是 3.8 定义的映射, 取 π: $\Sigma_0\to\Sigma$, $\pi(q)=\xi(\varphi(\tau_0,q))$.

π 的另一表达式是 $\pi(q)=\varphi(\tau_0+\tau(\varphi(\tau_0,q)),q)$, 其中 τ: $V\to\mathbb{R}$ 是 V 中 X 的轨道两次交于 Σ 所历时间, 由隐函数定理可知, τ 为 C^r 类.

上述表达式说明, π 与 X 具有相同微分阶, π 的逆 π^{-1}: $\Sigma_1\to\Sigma_0$ 可由场 $-X$ 加以定义. 这就证明了 π 是一个 C^r 微分同胚, $r\geqslant1$ 或 $r=\omega$.

5.3 **平面上的极限环.**

1. **定义.** 设 Δ 是 $\mathbb{R}^2$ 中开集, X: $\Delta\to\mathbb{R}^2$ 是一个 C^1 向量场. X 的一条周期轨道, 设为 γ, 称之为极限环, 如果存在 γ 的一个邻域 V, 使 γ 是 X 的唯一一条与 V 相遇的闭轨道.

2. **命题.** 在上述定义的记号下, 只存在下面三种极限环(必要时可缩小 V):

a) 稳定环: 对每一 $q\in V$, $\lim\limits_{t\to\infty}d(\varphi(t,q),\gamma)=0$;

b) 不稳定环: 对每一 $q\in V$, $\lim\limits_{t\to-\infty}d(\varphi(t,q),\gamma)=0$;

c) 半稳定环: 对每一 $q\in V\cap\mathrm{Ext}\gamma$, $\lim\limits_{t\to\infty}d(\varphi(t,q),\gamma)=0$, 又对每一 $q\in V\cap\mathrm{Int}\gamma$, $\lim\limits_{t\to-\infty}d(\varphi(t,q),\gamma)=0$, 或是反过来.

证明. 必要时可缩小 V, 而可设 V 内不含奇点. 令 $p\in\gamma$, 且 Σ 为 X 在 p 处的匀断截面. 设 π: $\Sigma_0\to\Sigma$ 为 Poincaré 变换(见

图9)．今设 Σ 上已有序，取 $\mathrm{Ext}\gamma$ 到 $\mathrm{Int}\gamma$ 的方向为正向．给定 $q\in\Sigma_0\cap\mathrm{Ext}\gamma$，则有 $\pi(q)>q$ 或 $\pi(q)<q$．设 $\pi(q)>q$．考虑一个域 A，由 γ，轨线弧 $q\pi(q)$，以及线段 $q\pi(q)\subset\Sigma_0$ 围起来；A 必为正向不变，即任给 $x\in A$，则对每一 $t\geqslant 0$，有 $\varphi(t,x)\in A$．由此 $\varphi(t,x)$ 将与 Σ 交得一个收敛于 p 的，严格单调的点列 x_n．由此可知 $\lim\limits_{t\to\infty}d(\varphi(t,x),\gamma)=0$．

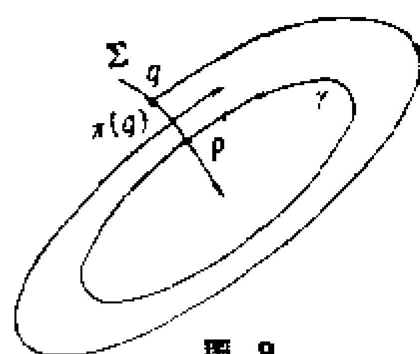


图 9

设 $\pi(q)<q$，则考虑场 $-X$，即可证明，对每一 $x\in A$，$\lim\limits_{t\to-\infty}d(\varphi(t,x),\gamma)=0$．

对 $\mathrm{Int}\gamma$ 作同样考虑，综合所有的可能性，命题得证．∎

3．**注**．在命题的记号下，易见，当且仅当 p 是 π 的孤立不动点时，γ 为极限环．因此

a) 当且仅当，对每一近于 p 的 $x\neq p$ 有

$$|\pi(x)-p|<|x-p|$$

时，γ 为稳定的；

b) 当且仅当，对每一近于 p 的 $x\neq p$ 有

$$|\pi(x)-p|>|x-p|$$

时，γ 为不稳定的；

c) 当且仅当，对每一近于 p 的 $x\in\Sigma\cap\mathrm{Ext}\gamma$ 有

$$|\pi(x)-p|<|x-p|,$$

且对每一近于 p 的 $x\in\Sigma\cap\mathrm{Int}\gamma$ 有

$$|\pi(x)-p|>|x-p|$$

时，γ 为半稳定的．反之亦然．

特别地，设 X 为解析的，又 $\pi(x)$ 不为恒等映射，而令 $\pi(x)=x+a_k(x-p)^k+\cdots\cdots$，$a_k\neq 0$．

于是，当 k 为奇数时，则当 $a_k<0$ 时，γ 稳定；当 $a_k>0$ 时，γ 不稳定．当 k 为偶数时，则 γ 为半稳定的．设 $\pi(x)=x$，即每一 a_k

为零，则γ位于X的一个周期轨道的族内.

当X为C^1类时，若$\pi'(p)<1$，由中值定理可知γ为稳定的.另一方面，若$\pi'(p)>1$，γ为不稳定的.（见图10.）

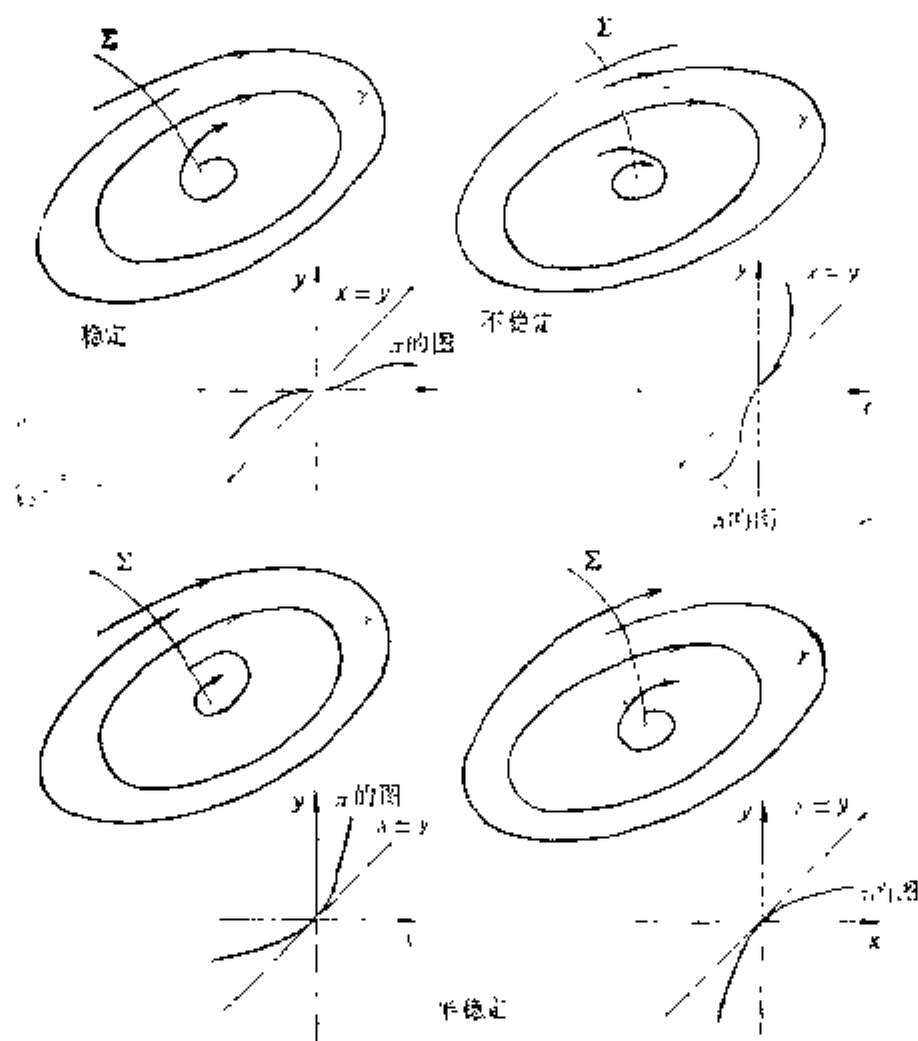


图 10

下面的定理给出一条周期轨道为稳定极限环的充分条件.

4.**定理.** 令$\Delta\subseteq\mathbb{R}^2$为一开集，$X=(X_1,X_2)$：$\Delta\to\mathbb{R}^2$为一$C^1$向量场.设$\gamma$是$X$的周期为$T$的周期轨道；又$\pi$：$\Sigma_0\to\Sigma$是$p\in\gamma$处匀断截线上的Poincaré映射，则

$$\pi'(p)=\exp\left(\int_0^T \operatorname{div}X(\gamma(t))\,dt\right), \qquad (*)$$

其中$\operatorname{div}X(x)=D_1X_1(x)+D_2X_2(x)$.特别地，若有

$\int_0^T \operatorname{div}X(\gamma(t))dt<0$，则$\gamma$稳定；若有$\int_0^T \operatorname{div}X(\gamma(t))dt>0$，

则 γ 不稳定。

证明. 对任一t，取$A(t)=DX(\gamma(t))$。设$\Phi(t)$是$\frac{dx}{dt}=A(t)x$，$\Phi(0)=E$的基本解阵；依 Liouville 公式，有

$$\det\Phi(T)=\exp\left(\int_0^T \operatorname{div}X(\gamma(t))dt\right).$$

今证明，$\pi'(p)=\det\Phi(T)$.

令 φ 是X的流. 依定理 1.1，$\Phi(T)=D_2\varphi(T,p)$. 首先注意$D_2\varphi(T,p)\cdot X(p)=X(p)$. 事实上，因$\frac{d}{dt}\varphi(t,p)|_{t=0}=X(p)$，故有

$$D_2\varphi(T,p)\cdot X(p)=\frac{d}{dt}\varphi(T,\varphi(t,p))|_{t=0}=\frac{d}{dt}\varphi(T+t,p)|_{t=0}$$

$$=\frac{d}{dt}\varphi(t,p)|_{t=0}=X(p).$$

另一方面，设 g: $(-\varepsilon,\varepsilon)\to\Sigma$是 Σ 的一个参化，使 $g(0)=p$，则集合$B=\{X(p);g'(0)\}$ 即构成$\mathbb{R}^2$ 的基. 依定义有 $\pi(g(s))=\varphi(T+\tau(\varphi(T,s)),g(s))$，于是

$$\pi'(p)\cdot g'(0)=\frac{d}{ds}\pi\circ g(s)|_{s=0}=D_1\varphi(T,p)\cdot a$$

$$+D_2\varphi(T,p)\cdot g'(0)=aX(p)+D_2\varphi(T,p)\cdot g'(0),$$

其中 a 是 $\tau(\varphi(T,g(s)))$在 $s=0$ 处的导数. 因此 $D_2\varphi(T,p)$在基 B 上的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & \pi'(p) \end{pmatrix},$$

从而得到 $\det\Phi(T)=\pi'(p)$. 定理的进一步的结论从注 3 推出. ∎

§6. 轨道的α极限集与ω极限集

令Δ是Euclid空间$\mathbb{R}^n$的一个开子集，X：$\Delta\to\mathbb{R}^n$是C^r向量场，$r\geqslant 1$，

设$\varphi(t)=\varphi(t, p)$是X的过p点，且定义于其极大区间I_p上的积分曲线，$I_p=(\omega_-(p),\omega_+(p))$。如有$\omega_+(p)=\infty$，则可定义集合

$\omega(p)=\{q\in\Delta;\ \exists\{t_n\}, t_n\to\infty$，且$\varphi(t_n)\to q$，当$n\to\infty$时$\}$；类似地，如有$\omega_-(p)=-\infty$，则可定义集合

$\alpha(p)=\{q\in\Delta;\ \exists\{t_n\}, t_n\to-\infty$，且$\varphi(t_n)\to q$，当$n\to\infty$时$\}$。

集合$\omega(p)$及$\alpha(p)$分别称为p的ω**极限集**及α**极限集**.

6.1 例子.

a)设X：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，又

$$X(x, y)=(x, -y)$$

给出一个鞍点.

令$E_1=\mathbb{R}\times\{0\}$及$E_2=\{0\}\times\mathbb{R}$，则

如$p=0$，$\alpha(p)=\omega(p)=\{0\}$；

如$p\in E_1-\{0\}$，$\omega(p)=\varnothing$，且$\alpha(p)=\{0\}$；

如$p\in E_2-\{0\}$，$\omega(p)=\{0\}$，且$\alpha(p)=\varnothing$；

如$p\overline{\in}E_1\cup E_2$，$\omega(p)=\alpha(p)=\varnothing$.

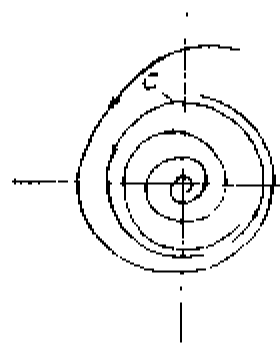


图 11

b)设$\varphi(t)=\varphi(t, p)$是周期为τ的周期解，则$\omega(p)=\gamma_p=\{\varphi(t, p), 0\leqslant t\leqslant\tau\}=\alpha(p)$。

事实上，若$q\in\gamma_p$，则存在$t'\in[0,\tau]$，使$\varphi(t', p)=q$。今定义一个序列$t_n=t'+n\tau$；于是$t_n\to\infty$，且$\varphi(t_n)=\varphi(t'+n\tau, p)=\varphi(t')=q$，

要证明$\alpha(p)=\gamma_p$，可取序列为$t_n=\tau'-n\tau$。

c)设X：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，$X(x, y)=(X_1(x, y), X_2(x, y))$为一$C^k$向

量场，其每一轨线从外侧及内侧盘向一个中心在原点，半径为1的圆 C，如图11.

例如可取

$$\begin{cases} X_1(x,y)=y+x(1-x^2-y^2), \\ X_2(x,y)=-x+y(1-x^2-y^2); \end{cases}$$

即知上述条件满足. 于是

当 p 在 C 内时，$\alpha(p)=\{0\}$；

当 p 在 C 外时，$\alpha(p)=\varnothing$；

当 $p\in C$ 时，$\alpha(p)=C$；

对任一异于原点的 p，$\omega(p)=C$.

6.2 注.

a）一旦用某点的 α 及 ω 极限得到平面上一个圆作为周期解，则它也是过每一与此点充分邻近的点的积分曲线的 α 及 ω 极限集.

b）若 γ_p 是 X 的过 p 点的轨道，又 $q\in\gamma_p$，则 $\omega(p)=\omega(q)$. 事实上，如 $q\in\gamma_p$，则存在 $c\in\mathbb{R}$，使 $\varphi(t,p)=\varphi(t+c,p)$. 类似地又有 $\alpha(p)=\alpha(q)$.

由注 b)，我们可作

6.3 定义. 一条轨道 γ 的 ω 极限集是对任一点 $p\in\gamma$ 得到的集合 $\omega(p)$.

一条轨道 γ 的 α 极限集是对任一点 $p\in\gamma$ 得到的集合 $\alpha(p)$.

6.4 注. 若 $\varphi(t)=\varphi(t,p)$ 是向量场 X 过 p 点的积分曲线，$\psi(t)=\psi(t,p)$ 是向量场 $-X$ 过 p 点的积分曲线，则 $\psi(t,p)=\varphi(-t,p)$.

因此，$\psi(t)$ 的 ω 极限集等于 $\varphi(t)$ 的 α 极限集；反之，$\varphi(t)$ 的 ω 极限集等于 $\psi(t)$ 的 α 极限集. 据此，要研究轨道的有关 α 及 ω 极限集的性质，只消限于研究 ω 极限集已足.

6.5 定理. 设 X：$\Delta\to\mathbb{R}^2$ 是一 C^r 向量场 $(r\geqslant1)$，定义于开集 $\Delta\subseteq\mathbb{R}^2$；又 $\gamma^+(p)=\{\varphi(t,p),\ t\geqslant0\}$（或 $\gamma^{-1}(p)=\{\varphi(t,p);\ t\leqslant0\}$ 是场 X 过 p 点的正半轨线（或负半轨线)；若 $\gamma^+(p)$（或 $\gamma^{-1}(p)$）

整含于一紧子集 $K\subseteq\Delta$ 内，则

a) $\omega(p)\neq\varnothing$（或 $\alpha(p)\neq 0$）；

b) $\omega(p)$ 为紧的（或 $\alpha(p)$ 为紧的）；

c) $\omega(p)$ 对 X 为不变的（或 $\alpha(p)$ 对 X 不变），就是说，若 $q\in\omega(p)$，则 X 过 q 的积分曲线也含于 $\omega(\alpha)$ 内；

d) $\omega(p)$ 为连通集（或 $\alpha(p)$ 为连通集）。

证明. 见[S.第七章]. ▌

考虑例 6.1c) 的场在开集 $\Delta=\mathbb{R}^2-\{p_1,p_2\}$ 上的限制场，其中 p_1 及 p_2 是单位圆 C 上的两个不同的点. 设 $p\neq 0$，且 $p\overline{\in}C-\{p_1,p_2\}$，则 $\omega(p)$ 是剔除点 p_1 及 p_2 的单位圆，因而 $\omega(p)$ 非连通. 此例说明，定理 6.5 中紧集 K 的存在性不能从定理条件中除去.

§7. Poincaré-Bendixson 定理

以下将设 Δ 是 $\mathbb{R}^2$ 中开子集，X 为一 Δ 上的 C^r 向量场，$r\geqslant 1$. 设以 γ_p^+ 记过 p 的正半轨线

$$\gamma_p^+=\{\varphi(t,p);t\geqslant 0\}.$$

7.1 **定理**(Poincaré-Bendixson). 令 $\varphi(t)=\varphi(t,p)$ 是 X 的一条积分曲线，对每一 $t\geqslant 0$ 有定义，且设 γ_p^+ 整含于一个紧集 $K\subset\Delta$ 内.

若向量场 X 在 $\omega(p)$ 上仅有有限个奇点，则下列情况必居其一：

a) 若 $\omega(p)$ 不含奇点，则 $\omega(p)$ 为一周期轨道；

b) 若 $\omega(p)$ 同时含有常点及奇点，则 $\omega(p)$ 是轨道组成的集，这时每一轨道当 $t\to\pm\infty$ 时，均趋于奇点；

c) 如 $\omega(p)$ 不含常点，则 $\omega(p)$ 为一奇点.

下面的引理将简化定理的证明.

引理1. 设 $p\in\Sigma\cap\omega(\gamma)$，其中 Σ 是 X 的一个匀断截线，又 $\gamma=\varphi(t)$ 是 X 的一条轨道，则 p 可表示成 Σ 上的一个点列 $\varphi(t_n)$ 的

极限，其中 $t_n \to \infty$.

证明. 设 $\gamma = \varphi(t) = \varphi(t, q)$，且 $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$，如图 12.

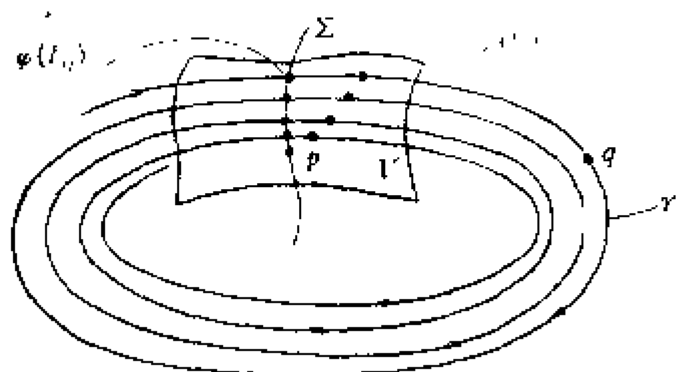


图 12

考虑推论 3.8 所给的邻域 V 及映射 τ: $V \to R$.

因 $p \in \omega(\gamma)$，故存在列 $\{\bar{t}_n\}$，使得当 $n \to \infty$ 时，$\bar{t}_n \to \infty$ 且 $\varphi(\bar{t}_n) \to p$.

这时存在整数 $n_0 \in N$，使得对每一整数 $n \geqslant n_0$，有 $\varphi(\bar{t}_n) \in V$. 令 $t_n = \bar{t}_n + \tau(\varphi(\bar{t}_n))$，对 $n \geqslant n_0$，有

$$\varphi(t_n) = \varphi(\bar{t}_n + \tau(\varphi(\bar{t}_n)), q) = \varphi(\tau(\varphi(\bar{t}_n)), \varphi(\bar{t}_n)).$$

又依 τ 的定义，得知 $\varphi(t_n) \in \Sigma$.

由于 τ 连续，故知

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(t_n) = \lim_{n \to \infty} \varphi(\tau(\varphi(\bar{t}_n)), \varphi(\bar{t}_n)) = \varphi(0, p) = p;$$

这是因为当 $n \to \infty$ 时，$\varphi(\bar{t}_n) \to p$，又 $\tau(\varphi(\bar{t}_n)) \to \tau(p) = 0$. 引理证毕. ▮

注意，因为我们讨论 $\mathbb{R}^2$ 中的向量场，所以场 X 的匀断截线 Σ 为一维集. 因此，局部地，Σ 应是实区间的微分同胚像. 为行文计，今后恒将每一匀断截面 Σ 视为一区间的微分同胚像. 这样，Σ 将赋有一个由区间的全序所诱导的全序"$\leq$"，从而便可讨论 Σ 上的单调点列.

引理 2. 设 Σ 是 X 的含于 Δ 内的匀断截线，γ 是 X 的一条轨道，且 $p \in \Sigma \cap \gamma$，则 $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p);\ t \geqslant 0\}$ 与 Σ 交得一个单调点列 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$

证明．令 $D=\{t\in\mathbb{R}^+;\varphi(t,p)\in\Sigma\}$，则依管状流定理，$D$ 应为离散集，从而可将此集有序化

$$D=\{0<t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots\}.$$

设 $p_1=p$，则定义 $p_2=\varphi(t_1,p)$，只要 p_2 存在．依归纳法，可定义 $p_n=\varphi(t_{n-1},p)$．

若 $p_1=p_2$，则 γ 是一周期为 $\tau=t_1$ 的闭轨线，从而对一切 n，$p=p_n$．

设 $p_1\neq p_2$，不妨设 $p_1<p_2$，则若存在 p_3，我们证明必有 $p_3>p_2$．

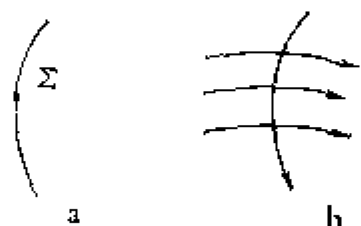


图 13

将截线Σ如图 13a 定向之，则从Σ为连通及场的连续性可知，X 的轨道必以同一方向穿越截线 Σ；设如图 13b，自左向右穿越．

我们记得在$\mathbb{R}^2$上 Jordan 曲线定理成立：

“令 J 为一连续单闭曲线（一个圆的同胚像），则$\mathbb{R}^2-J$ 具有两个连通分支：S_i（有界分支）与 S_e（无界分支），它们以 J 为公共边界．”

于是可考虑曲线段 $\overline{p_1p_2}\subset\Sigma$及轨线弧$\widehat{p_1p_2}$（$=\{\varphi(t,p);0\leqslant t\leqslant t_1\}$）组成的 Jordan 曲线，如图 14 所示．

特别地，在轨道 γ 上，从 p_2 点开始，即从 $t>t_1$ 之值 t 起，轨道 γ 将含于 S_i 中．事实上，因为轨线的唯一性，所以它既不能交于弧$\widehat{p_1p_2}$，也不能与线段 $\overline{p_1p_2}$相交，以致与流的方向矛盾．

由上述讨论可知，当 p_3 存在时，必有 $p_1<p_2<p_3$，如图 15 所

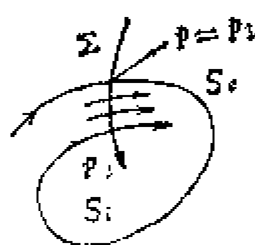


图 14

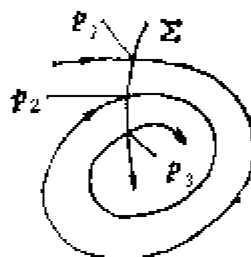


图 15

示. 重复此理，得 $p_1<p_2<p_3<\cdots<p_n<\cdots$

从而$\{p_n\}$为一单调点列.

若是 $p_2<p_1$，则证明相仿. ▮

引理3. 设Σ为场X的匀断截线，又 $p\in\Delta$，则 Σ 与 $\omega(p)$ 相交至多一点.

证明. 由前面的引理可知，γ_p^+ 在 Σ 上的点集，因其为单调列，至多只有一个极限点；故从引理 1 即得出结果. ▮

引理4. 设 $p\in\Delta$，且使 γ_p^+ 含于一紧集中；令 γ 为 X 之一轨道，$\gamma\subset\omega(p)$. 如 $\omega(\gamma)$不含奇点，则 γ 为一闭轨道，且 $\omega(p)=\gamma$.

证明. 设 $q\in\omega(\gamma)$不为奇点，V 是 (3.8) 中所给的 q 之邻域，Σ_q 是相应的匀断截线，则依引理 1，存在列 $t_n\to\infty$，使 $\gamma(t_n)\in\Sigma_q$. 今因 $\gamma(t_n)\in\omega(p)$，依引理 3 可知列$\{\gamma(t_n)\}$应为单点集，由此立即推知 γ 为周期轨道.

今证明 $\gamma=\omega(p)$. 因为 $\omega(p)$连通，γ 为闭集且非空，所以只消证明 γ 在 $\omega(p)$中为开集即可.

设 $\bar{p}\in\gamma$，$V_{\bar{p}}$ 是 $\bar{p}$ 的由推论(3.8) 给出的邻域，$\Sigma_{\bar{p}}$是相应的匀断曲线，我们证明 $V_{\bar{p}}\cap\gamma=V_{\bar{p}}\cap\omega(p)$.

显然 $V_{\bar{p}}\cap\gamma\subset V_{\bar{p}}\cap\omega(p)$. 反之，设存在 $\bar{q}\in V_{\bar{p}}\cap\omega(p)$ 使 $\bar{q}\notin\gamma$；则依管状流定理以及 $\omega(p)$的不变性，知存在 $t\in\mathbb{R}$，使$\varphi(t,\bar{q})\in\omega(p)\cap\Sigma_{\bar{p}}$ 且 $\varphi(t,\bar{q})\neq\bar{p}$. 于是推知在 $\Sigma_{\bar{p}}$ 上存在$\omega(p)$的两个相异点，但依引理 3，此为不能. 从而必有 $V_{\bar{p}}\cap\gamma=V_{\bar{p}}\cap\omega(p)$.

令 $U=\bigcup_{\bar{p}\in\gamma}V_{\bar{p}}$、$U$ 在 M中为开的，$\gamma\subset U$ 且 $U\cap\omega(p)=U\cap\gamma=\gamma$. 可知 γ 是$\mathbb{R}^2$ 中开集与 $\omega(p)$之交. 故知 γ 在 $\omega(p)$中为开的. ▮

Poincaré-Bendixson **定理的证明.**

(1)设 a)的假设成立，又 $q\in\omega(p)$，则知 $\gamma_q\subset\omega(p)$. 又因 $\omega(p)$为紧的，于是知 $\omega(\gamma_q)\neq\varnothing$. 从而由引理 4 直接知 $\omega(p)=\gamma_q$ 为一闭轨道.

（2）设b)的假设成立，又γ是一条含于$\omega(p)$中的轨道，则因γ不只由一个奇点组成，依引理4，以及$\alpha(\gamma)$及$\omega(\gamma)$的连通性，可知$\alpha(\gamma)$及$\omega(\gamma)$均为场X的奇点.（我们记得，X在$\omega(p)$中仅有有限个奇点）. 见图16(a)及图16(b). ▌

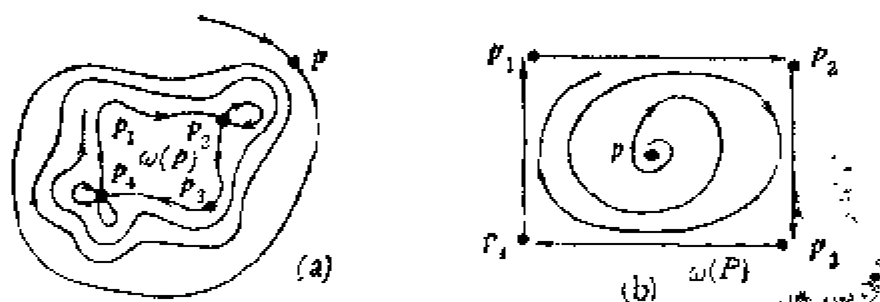


图 16

（3）情形c)可从$\omega(p)$为连通的，以及X在$\omega(p)$中仅有有限个奇点立即推出. ▌

7.2 例子.

设X是$\mathbb{R}^2$上的C^1向量场，使在$B_r=\{(x,y);\frac{r}{2}\leqslant x^2+y^2\leqslant r\}$中无奇点. 若在$B_r$边界每点处，$X$均指向$B_r$之内域，则可知$X$在$B_r$内必有一周期轨道. 为此只要对$B_r$边界上一点处的正半轨用一下Poincaré-Bendixson定理即可.

7.3 S^2上的Poincaré-Bendixson定理.

设X是$\mathbb{R}^3$上一个C^1向量场，使得当$x\in S^2=\{(x_1,x_2,x_3);x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$时，对每一$t\in\mathbb{R}$，$\varphi(t,x)\in S^2$.

为此必要充分条件是对每一$x\in S^2$，$X(x)\in TS^2_x$，其中TS^2_x表示S^2在x处的切平面. 读者可自行证明这个结论.

如X在S^2上仅有有限个奇点，则$x\in S^2$的轨道的ω极限集，必出现与$\mathbb{R}^2$上Poincaré-Bendixson定理一样的三种可能性a)—c).

其证明与$\mathbb{R}^2$情形相仿，只消利用如下事实：S^2上的Jordan曲线J将S^2-J分割成两个以J为公共边界的连通分支.

7.4 定理. 设X是开集$\Delta\subset\mathbb{R}^2$上的$C^1$向量场；又$\gamma$为$X$的闭轨线，使$\text{Int}\gamma\subset\Delta$，则在$\text{Int}\gamma$中必存在$X$的一个奇点.

证明. 见[S. 第七章]. ∎

参 考 文 献

[L] Lima E. Análise no espaço $\mathbb{R}^n$. E. Blücher, 1970.
[S] Sotomayor J. Lições de Equações Diferenciais. Projeto Euclides CNPq. 1979.

第二章　多项式系统的极限环

§1. 引　　言

微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt}=Q(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

的极限环，或者等价地，向量场 $X=(P,Q)$ 的极限环，是指一个孤立周期轨道. 由第一章§5.3的讨论可知，只存在三种极限环：稳定环，不稳定环及半稳定环. 本章将讨论(1)的极限环的有限性问题，并证明 Poincaré 有限性定理的一个变形.

设 $\mathscr{X}_n$ 是向量场 $X=(P,Q)$ 的空间，其中 P,Q: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是次数不超过 n 的多项式；场 X 与 P 及 Q 的系数组成的空间 $\mathbb{R}^{(n+1)(n+2)}$ 中的点一一对应，于是可设想 $\mathscr{X}_n$ 中已赋有一个有限维向量空间的结构，常称Tarski拓扑. Poincaré 的有限性定理[2]建立了一个分划：$\mathscr{X}_n=\varepsilon_n\cup J_n$，具有下面性质：

a. ε_n 是 $\mathscr{X}_n$ 中一个内域为空的集合，此集构成"例外情形"；

b. 每一场 $X\in J_n$ 具有有限个极限环，集 J_n 构成"一般情形".

依 Poincaré 的定义，J_n 是这样的场 $X\in\mathscr{X}_n$ 的集合，X 的 Poincaré 紧化场 $\mathscr{P}(X)$（见本章§3)的每一奇点均为双曲的，且不允许具有奇闭轨线与图.

在我们的变形定理中，则确定了一个具有下列性质的分划 $\mathscr{X}_n=\varepsilon_n\cup J_n$：

a. ε_n 含于一个正则解析流形的可数并(即其内域为空)之中；

b. 每一 $X\in J_n$ 具有有限个周期轨道，特别地，X 具有有限个

极限环.

我们还将给出另一个变形定理，这时 $\mathscr{X}_n = \mathscr{E}'_n \cup J'_n$，而场 $X \in J'_n$ 的 Poincaré 紧化场 $\mathscr{P}(X)$ 的每一奇点均为双曲的，且每一奇闭轨道或图均为简单的(见定义2.2).

单图具有周期轨道不再在其近旁结聚的性质，用代数运算方法可以判定一图是否为单图.

§2. 单　　图

令Δ是 $\mathbb{R}^2$ 的开集，$X: \Delta \to \mathbb{R}^2$ 为一 C^1 向量场.

定义. X的一个图是指Δ的一连通紧子集，它由X的满足下列条件的鞍点与分界线组成.

(i) 图的每一分界线的 ω 极限集及 α 极限集均为鞍点；

(ii) 图的每一鞍点至少是含于图中的一条稳定分界线及一条不稳定分界线的极限点.

下列命题是 Poincaré-Bendixson 定理的特款.

2.1 **命题.** 设 $x: \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是一 C^1 向量场，其奇点均为双曲的. 若X的一条轨道的ω 极限集为紧的，则它必为一奇点，或一闭轨道，或为一图.

证明. 设X的轨线 γ 的 ω 极限集为紧的. 如果 $\omega(\gamma)$ 不是奇点，也不是闭轨，则 Poincaré-Bendixson 定理保证 $\omega(\gamma)$ 由奇点及正则轨线组成. 今 $\omega(\gamma)$ 的奇点无一是斥型或吸型奇点，故必为鞍点，因而 $\omega(\gamma)$ 的正则轨线是鞍点分界线，从而图的定义条件(1)满足. 今证明条件(2)也满足. 设 p 是 $\omega(\gamma)$ 的一个鞍点，B是 p 点近旁一甚小的圆，使得 p 的分界线将 B分成四个部分，其中之一设为 $\mathbb{R}$，它含有结聚于 p 点处的$B \cap \gamma$的无限连通分支. 容易看出，γ 也结聚于确定区域$\mathbb{R}$ 的稳定分界线及不稳定分界线. 由此即证明 $\omega(\gamma)$ 为一图，从而命题得证. (见图17.)∎

令G为一 C^1 向量场 $X: \Delta \to \mathbb{R}^2$ 的图，$p_1, p_2, \cdots, p_k$是G的鞍点. 令 $\mu_i < 0 < \lambda_i$ 是 $DX(p_i)$，$1 \leqslant i \leqslant k$，的两个特征值，则有一与

图G相关联的数

$$\rho(G)=\prod_{i=1}^{k}\frac{|\mu_i|}{\lambda_i}.$$

2.2 定义. 若$\rho(G)\neq 1$，则称G为一单图.

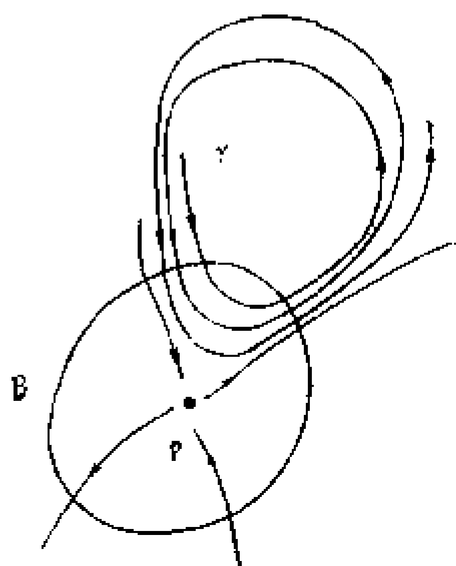


图 17

一个C^1向量场X：$\Delta\to\mathbb{R}^2$的图G将平面划分为有限个区域，每一区域以由G的鞍点及分界线组成的单闭曲线为其边界. 令$\mathbb{R}$是这样的域之一. 再设存在一个$\mathbb{R}\cap\Delta$中的开环域A，使$\partial\mathbb{R}\subset\partial A$.设$S$是$X$的一条经过$\partial\mathbb{R}$分界线之点$p$的匀断截线，且令$I=S\cap A$.对于$I$中每一甚近于$p$的点$x$，我们定义$\pi(x)$是$X$的经过$x$的正半轨线与$I$相遇的第一个点. 当$\pi$：$I_0\subset I\to I$已在一个以$p$为端点的开区间$I_0$上被定义时，便称$\pi$是回复变换. 由于$\partial\mathbb{R}$处不得被$X$的位于$R$中的周期轨道结聚，故使$\pi$存在的一个条件是，$A$不得与$\partial\mathbb{R}$的鞍点分界线相交.（见图18.）图19中画出的图，即属不能在I上定义回复变换的情形.

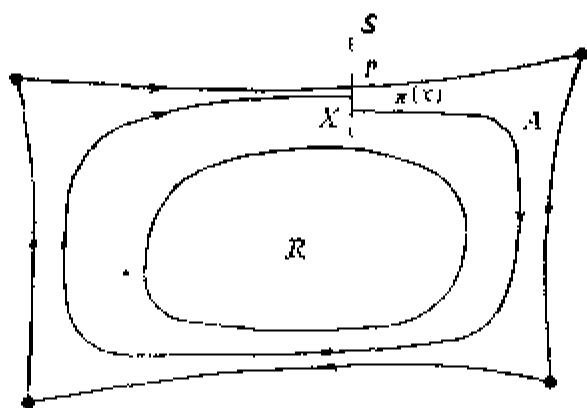


图 18

下面定理提供了一个代数特征，以便用来描述场X的相空间中的图的邻域的性态.

定理1. 令X：$\Delta\to\mathbb{R}^2$是一C^2场，设G是X的单图. 又设G含有（分隔G的鞍点分界线的）开环域$A\subset\Delta$边界的连通分支. 若存在G在$A\subset\Delta$中的一个邻域V，使$\rho(G)>1$（或$\rho(G)<1$），则V的每一轨线以G为ω极限（或α极限）.

此定理的证明依赖于下面引理. 兹先作一些讨论.

令 p 是场 X 的鞍点，利用线性坐标变换，可使 $p=(0,0)$，且 $DX(0,0)$ 的(稳定及不稳定)特征空间 E^s 及 E^u 对应为坐标轴 Ox 及 Oy．设 $B^s\subset E^s$ 及 $B^u\subset E^u$ 是中心在原点的甚小开区间．存在 C^2 类函数 φ：$B^u\to E^s$ 及 ψ：$B^s\to E^u$，使原点映成原点，且其图像恰为 X 在 $(0,0)$ 处的局部稳定及不稳定分界线．注意 $\varphi'(0)=0$ 及 $\psi'(0)=0$．今设 Φ：$B^u\times B^s\to\mathbb{R}^2$，$\Phi(x,y)=(x-\psi(y),y-\varphi(x))$．则 Φ 是 $(0,0)$ 处的局部 C^2 微分同胚，并且诱导场 $Y=\Phi_* X$ 满足下列性质：Y 为 C^1 类，Φ 将 X 的轨道映成 Y 的轨道；$(0,0)$ 也是 Y 的奇点，且 $DY(0,0)$ 与 $DX(0,0)$ 有相同特征值，而 Y 的局部不稳定及稳定分界线分别含于 Ox 及 Oy 中．(见图20.)

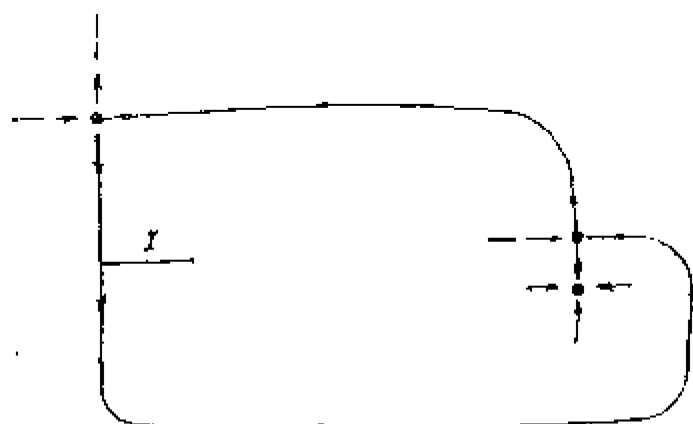


图 19

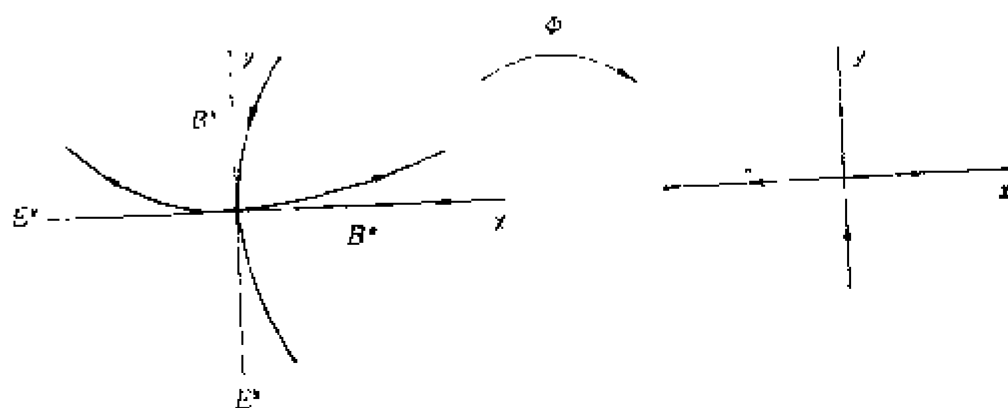


图 20

设 $\delta>0$，则集合 $I_\delta=\{(x,y);0<x<\delta/2,\ y=\delta\}$ 以及 $J_\delta=\{(x,y);x=\delta$ 及 $y>0\}$ 将分别与区间 $(0,\delta/2)$ 及半轴 $(0,+\infty)$ 重合．令 $\delta>0$ 甚小，依 Y 的流定义一变换 π：$I_\delta\to J_\delta$．下面的引理给出 π 的基本性质．

2.3 引理．令 X：$\Delta\to\mathbb{R}^2$ 为一 C^1 场．设 $(0,0)$ 是 X 的鞍点，其特征值 $\mu<0<\lambda$，且稳定及不稳定分界线分别含于 Oy 及 Ox 中．则任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使 π：$I_\delta\to J_\delta$ 满足

$$\delta^{1-\frac{|\mu|}{\lambda-\varepsilon}}x^{\frac{|\mu|}{\lambda-\varepsilon}}<\pi(x)<\delta^{1-\frac{|\mu|}{\lambda+\varepsilon}}x^{\frac{|\mu|}{\lambda+\varepsilon}}.$$

证明. 取 $X(x,y)=(\lambda x+r_1(x,y),\mu y+r_2(x,y))$. 则对每一 x 及 y, $r_1(0,y)=0$ 且 $r_2(x,0)=0$. 注意

$$r_1(x,y)=r_1(0,y)+x\int_0^1\frac{\partial r_1}{\partial x}(sx,y)ds,$$

可知有 $r_1(x,y)=x\bar{r}_1(x,y)$, 其中 $\bar{r}_1$ 连续, $\bar{r}_1(0,0)=0$. 同法可写成 $r_2(x,y)=y\cdot\bar{r}_2(x,y)$.

给定 $\varepsilon>0$, 考虑线性场 $X_\varepsilon(x,y)=((\lambda+\varepsilon)x,\mu y)$. 注意当 $|(x,y)|$ 甚小时, 向量 $X(x,y)$ 及 $X_\varepsilon(x,y)$ 构成正定向(见图21).

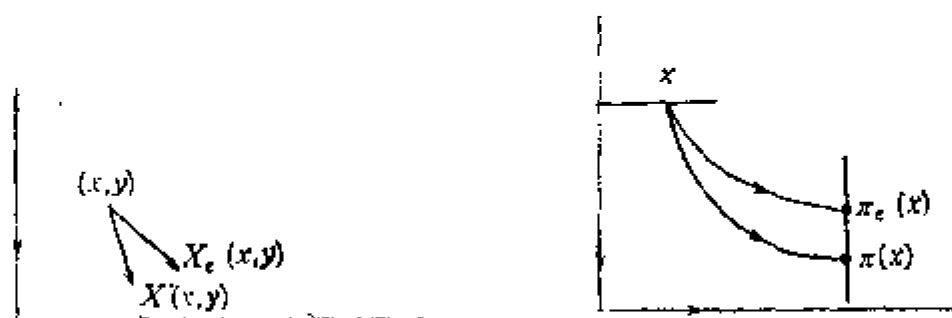


图 21

事实上, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<x<\delta$, $0<y<\delta$ 时, 有

$$\begin{vmatrix}\lambda x+x\bar{r}_1(x,y) & (\lambda+\varepsilon)x\\ \mu y+y\bar{r}_2(x,y) & \mu y\end{vmatrix}=xy(\mu\bar{r}_1(x,y)-\mu\varepsilon-(\lambda+\varepsilon)\bar{r}_2(x,y))$$
$$>0.$$

从而若 $\delta>0$ 甚小, 则由 X_ε 定义的变换 π_ε: $I_\delta\to J_\delta$ 即满足性质: 对一切 x, $\pi(x)\leqslant\pi_\varepsilon(x)$. 今 X_ε 的流是 $(t,x,y)\to(xe^{(\lambda+\varepsilon)t}, ye^{\mu t})$, 故知 $\pi_\varepsilon(x)=ye^{\mu t_0}$, 其中 $t_0>0$ 满足 $xe^{(\lambda+\varepsilon)t_0}=\delta$. 于是 $t_0=\frac{1}{\lambda+\varepsilon}\log\frac{\delta}{x}$, 因而

$$\pi_\varepsilon(x)=\delta\left(\exp\log\frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{\mu}{\lambda+\varepsilon}}=\delta^{1-\frac{|\mu|}{\lambda+\varepsilon}}\ x^{\frac{|\mu|}{\lambda+\varepsilon}},$$

此即引理的不等式之一. 对另一半不等式, 考虑场 $X_{-\varepsilon}=((\lambda-\varepsilon)x,\mu y)$ 即可. ∎

定理1的证明. 我们就图的鞍点个数用归纳法证明定理,且只考虑两个鞍点的情形,由此读者即可容易地推出其余部分. 设 G 含有两个鞍点 p_1 及 p_2, 它们分别具有特征值 $\mu_1<0<\lambda_1$ 及 $\mu_2<0<\lambda_2$;又 G 的正则轨线在 p_1 及 p_2 处结聚,如图22.

在 p_1 及 p_2 近旁分别考察两个充分小的球 B_1 及 B_2; 令 Φ_i: $B_i\to\mathbb{R}^2$, $i=1,2$, 是 C^1 微分同胚,使诱导场 $(\Phi_i)_*X$ 正好具有引理 2.3 中鞍点的情形.

今设 $\rho(G)>1$. 取 $\varepsilon>0$ 使 $\frac{|\mu_1|}{\lambda_1+\varepsilon}\cdot\frac{|\mu_2|}{\lambda_2+\varepsilon}>1$. 命 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 是引理 2.3 所给的数,又 I_i, $1\leqslant i\leqslant 4$, 是同一引理所给的区间,见图22. 则变换 π_1: $I_1\to\mathbb{R}_+$ 及 π_2: $I_3\to\mathbb{R}_+$ 满足不等式

$$\pi_1(x)<C_1x^{\frac{|\mu_1|}{\lambda_1+\varepsilon}} \text{ 及 } \pi_2(x)<C_2x^{\frac{|\mu_2|}{\lambda_2+\varepsilon}},$$

其中 C_1 及 C_2 是与 x 无关的常数. 今取 $\tilde{I}_i=\Phi_i^{-1}(I_i)$, $i=1,2$, 及

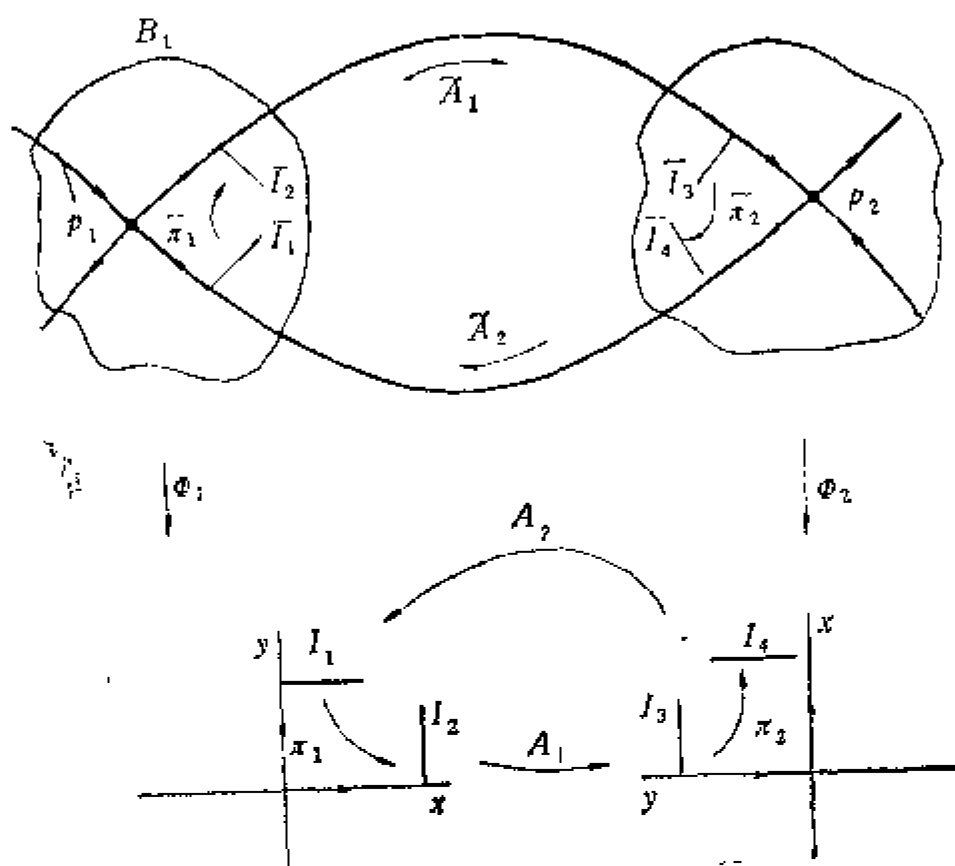


图 22

$\tilde{I}_i=\Phi_2^{-1}(I_i)$, $i=3,4$. 再命 $\tilde{A}_1$: $\tilde{I}_2\to\tilde{I}_3$ 及 $\tilde{A}_2$: $\tilde{I}_4\to\tilde{I}_1$ 由 X 的流所定义，则映射 $A_1=\Phi_2\tilde{A}_1\Phi_1^{-1}$: $I_2\to\mathbb{R}_+$ 及 $A_2=\Phi_1\tilde{A}_2\Phi_2^{-1}$: $I_4\to\mathbb{R}_+$ 可扩张成 $\{-\delta<x<\delta\}$ 上的 C^2 微分同胚，且将原点变为原点. 于是可写成 $A_1(x)=xB_1(x)$ 及 $A_2(x)=xB_2(x)$，其中 B_1 及 B_2 为 C^1 类. 我们现在证明，对每一甚小的 x，映射 $\pi=A_2\pi_2A_1\pi_1$: $I_1\to\mathbb{R}_+$ 满足条件 $\pi(x)<x$. 因 $\Phi_1^{-1}\pi\Phi_1$: $\tilde{I}_1\to\tilde{I}_1$ 是 X 在图 G 上的回复变换，由此即可得出定理结论. 现因对每一 x 有 $B_1(x)\leqslant K_1$, $B_2(x)\leqslant K_2$，从而

$$
\begin{aligned}
\pi(x) &= A_2\pi_2A_1\pi_1(x)=\pi_2A_1\pi_1(x)B_2(\pi_2A_1\pi_1(x)) \\
&\leqslant K_2\pi_2A_1\pi_1(x)<K_2C_2[A_1(\pi_1(x))]^{\frac{\mu_2}{\lambda_1+\varepsilon}} \\
&\leqslant K_2C_2K_1^{\frac{|\mu_2|}{\lambda_1+\varepsilon}}|\pi_1(x)|^{\frac{|\mu_2|}{\lambda_1+\varepsilon}},
\end{aligned}
$$

因而 $\pi(x)<Kx^{\lambda}$，即对每一甚小的 x，有 $\dfrac{\pi(x)}{x}<1$. 于是存在 G 的 $A\cup G$ 中邻域 V，使得当 $x\in V$ 时，有 $G=\omega(x)$. 若 $\rho(G)<1$，则证明类似. ▌

2.4 **推论**. C^2 向量场 X 的单图不得结聚周期解.

2.5 **引理**. 令 X: $\Delta\to\mathbb{R}^2$ 为一 C^1 向量场. 设 M 是 Δ 的紧域，其边界对 X 为不变，且 X 在 M 中的每一奇点均为双曲的. 如果此时在 M 内存在 X 的一个周期轨道的序列 $\{\gamma_n\}_{n\geqslant1}$，其上有点列结聚在 X 的一奇点 x_0 处，则轨道列 $\{\gamma_n\}_{n\geqslant1}$ 必结聚于 X 的位于 M 中的一个图的附近.

证明. 因为 x_0 为双曲奇点，所以可知它为一鞍点，且易见周期轨 $\{\gamma_n\}$ 结聚于 x_0 的一条稳定分界线 S_1 与 x_0 的一条不稳定分界线 S_2 附近. 注意 $\omega(S_2)\subset M$，且依命题 1，$\omega(S_2)$ 为一鞍点，从而排除了别的可能性. 如果 $\omega(S_2)=x_0$，即得一由 x_0, S_1 及 S_2 组成的图（不论 $S_1=S_2$ 或 $S_1\neq S_2$），它邻近结聚了无穷多个 γ_n. 若 $\omega(S_2)\neq x_0$，则继续上述过程，又可得到一个被 $\{\gamma_n\}_{n\geqslant1}$ 结聚的图. 引理证毕. ▌

注. 上述引理中如果M的边界与场X匀断相交，那么结论依然成立.

定理2. 令 X: $\Delta\to\mathbb{R}^2$ 为一 C^2 向量场. 设M是 Δ 的一个紧域，其边界对X为不变，且X在M中的每一个奇点均为双曲的，又其中每一图均为单图，则X的周期轨道的集 $\mathscr{F}(M)$ 为一紧集.

证明. 首先注意，不存在被周期轨道结聚的图，否则与定理 1 相违. 令 $(x_n)_{n\geq1}$ 是 $\mathscr{F}(M)$ 中一个收敛于点 $x_0\in M$ 的点列. 设每一x_n又表示一条周期轨道(各不相同). 则从上面引理可知，x_0 是常点，又$\omega(x_0)$不为奇点. 于是依命题2.1，$\omega(x_0)$为一周期轨道，且容易推出有 $x_0\in\omega(x_0)$. 因此 $x_0\in\mathscr{F}(M)$，定理证毕. ∎

定理3. 令 X: $\Delta\to\mathbb{R}^2$是一解析场，M为一含于 Δ 内的连通紧域，其边界为解析的且对X为不变的. 则或者X只有有限个周期解，或者M为X的周期轨道所填满(为一环域).

证明. 设X具有无限多个周期轨道，用定理 2 以及X的解析性可以证明，X 在 M 中的每一轨道均为周期的. 事实上，集合 $\mathscr{F}'(M)=\{$列(x_n)的极限点；每一x_n表示相异周期轨道$\}$在M中既开又闭，从而 $\mathscr{F}'(M)=M$. 要证明M为一环域，我们作一条X在M中的全局截线，它与一闭区间为微分同胚. 设 $X^\perp$ 是 X 的正交场(即若 $X=(P,Q)$，则 $X^\perp=(-Q,P)$，且若 p 为M的边界上的一点时，则设 $X^\perp(p)$ 指向M之内域(在相反情形考虑 $-X$)). 若 $\gamma(t)$ 是 $X^\perp$ 的始于 p 的正轨线，则可断定 γ 与M的边界交于一点 $\gamma(t_0)$，$t_0>0$. 因为若不然，则 $\omega(\gamma)\subset M$，所以依命题2.1，$\omega(\gamma)$ 将是 $X^\perp$ 的一条周期轨道，而这是不可能的. 今令 t_0 为正，使 $\gamma(t_0)$ 位于M的边界上. 注意 p 及 $\gamma(t_0)$ 各位于X的不同周期轨道上. 取 $I=\{\gamma(t);0\leq t\leq t_0\}$. 则$X$的经过 I 中的点的轨道的并是个闭环域，其边界含于M的边界之中. 因M为连通，可知M是一环域. 定理得证. ∎

§3. Poincaré紧化场

考察$\mathbb{R}^3$中球面$S^2=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3; x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$以及$S^2$上切于点(0,0,1)的平面$\pi=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3; x_3=1\}$ 若r是过原点(0,0,0)及π上一点p的直线，则r交S^2于p_+及p_-两点，前者位于上半开球面$H_+=\{(x_1,x_2,x_3)\in S^2; x_3>0\}$，后者位于下半开球面$H_-=\{(x_1,x_2,x_3)\in S^2; x_3<0\}$. 由此给出两个满的微分同胚$f_+$: $\pi\to H_+$及f_-: $\pi\to H_-$，且对于$x=(x_1,x_2)\in\pi$，其表达式为

$$f_+(x)=\frac{(x_1,x_2,1)}{\Delta(x)},\qquad f_-(x)=\frac{-(x_1,x_2,1)}{\Delta(x)},\tag{1}$$

其中$\Delta(x)=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}$. 若$X$是$\mathbb{R}^2$上的一个场，则依下式可得$H_+\cup H_-$上的一个诱导场$\bar{X}$:

$$\bar{X}(y)=Df_+(x)\cdot X(x),\text{当 } y=f_+(x)\in H_+\text{ 时.}$$

及

$$\bar{X}(y)=Df_-(x)\cdot X(x),\text{当 } y=f_-(x)\in H_-\text{ 时.}$$

为了研究场X的无界轨线的渐近动态，宜于将$\bar{X}$扩张至赤道$S^1=\{(x_1,x_2,x_3)\in S^2; x_3=0\}$，从而得到球面$S^2$上的一个场. 在赤道的一个邻域内研究这个场，即可得到所要的信息. 此法看来是可行的，下一命题告诉我们对一多项式场应如何做.

$\mathbb{R}^2$上的一个向量场$X=(P,Q)$称之为多项式场，若是P,Q: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是变量$x$及$y$的多项式，$X$的次数即数max($P$的次数，$Q$的次数).

3.1 命题. 令X是$\mathbb{R}^2$上一个n次多项式场；设ρ: $S^2\to\mathbb{R}$是函数$\rho(y_1,y_2,y_3)=y_3^{n-1}$，又设$\bar{X}$是上面定义的$S^2-S^1$上的诱导场，则$\rho\bar{X}$可在$S^2$上扩张成为解析场，且此场以赤道为不变集.

在证明此命题之前，先选择S^2上的一个适当的坐标系，并计

算 $\tilde{X}$ 在此坐标下的表达式.

令 Φ_i: $U_i\to\mathbb{R}^2$ 及 ψ_i: $V_i\to\mathbb{R}^2$, $i=1,2,3$, 其中

$$\begin{cases} U_i=\{(y_1,y_2,y_3)\in S^2; y_i>0\}, \\ V_i=\{(y_1,y_2,y_3)\in S^2; y_i<0\}, \\ \Phi_i(y)=\dfrac{1}{y_i}(y_j,y_k),\ \forall\, y\in U_i, i,j,k=1,2,3, j<k, i\neq j,k, \\ \psi_i(y)=\dfrac{1}{y_i}(y_j,y_k),\ \forall\, y\in V_i, i,j,k=1,2,3, j<k, i\neq j,k. \end{cases} \tag{2}$$

令 $y\in H_+\cap U_1$, 则 $y=f_+(x)$ 且

$$(\phi_1\circ f_+)(x)=\begin{cases} z_1=\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{y_2}{y_1} \\ z_2=\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{y_3}{y_1}, \end{cases} \text{其逆为} \begin{cases} x_1=\dfrac{1}{z_2}, \\ x_2=\dfrac{z_1}{z_2}. \end{cases} \tag{3}$$

注意

$$D(\phi_1\circ f_+)(x)=\begin{pmatrix} -\dfrac{x_2}{x_1^2} & \dfrac{1}{x_1} \\ -\dfrac{1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix},$$

故有

$$\begin{aligned} D\phi_1(y)\cdot\tilde{X}(y) &= D(\phi_1\circ f_+)(x)\cdot X(x) \\ &= \frac{1}{x_1^2}(-x_2P(x)+x_1Q(x), -P(x)). \end{aligned}$$

这便是 $\tilde{X}$ 在 $U_1\cap H_+$ 中的表达式. 为了便于分析, 我们改用 z_1, z_2 的函数. 用(3)我们得到表达式

$$z_2\left(-z_1P\left(\frac{1}{z_2},\frac{z_1}{z_2}\right)+Q\left(\frac{1}{z_2},\frac{z_1}{z_2}\right),\ -z_2P\left(\frac{1}{z_2},\frac{z_1}{z_2}\right)\right). \tag{4}$$

另一方面

$$\rho(f_+(x))=\frac{1}{\Delta(x)^{n-1}}=\frac{z_2^{n-1}}{\Delta(x)^{n-1}},$$

故可给出 $\rho\tilde{X}$ 在坐标 (z_1,z_2) 下的表达式

$$\frac{z_2^n}{\Delta(z)^{n-1}}\left(-z_1P\left(\frac{1}{z_2},\frac{z_1}{z_2}\right)+Q\left(\frac{1}{z_2},\frac{z_1}{z_2}\right),\ -z_2P\left(\frac{1}{z_2},\frac{z_1}{z_2}\right)\right). \tag{5}$$

容易验证，当 $y\in U_1\cap H_-$ 时，我们将得到同一表达式(5)．可见(5)即为 U_1 上扩张场 $\rho\tilde{X}$ 的表达式.

读者易于验证，$\rho\tilde{X}$ 在 U_2 及 U_3 上的表达式分别为

$$\frac{z_2^n}{\Delta(z)^{n-1}}\left(P\left(\frac{z_1}{z_2},\frac{1}{z_2}\right)-z_1Q\left(\frac{z_1}{z_2},\frac{1}{z_2}\right),\ -z_2Q\left(\frac{z_1}{z_2},\frac{1}{z_2}\right)\right) \quad (6)$$

及

$$\frac{1}{\Delta(z)^{n-1}}(P(z_1,z_2),Q(z_1,z_2)). \quad (7)$$

此外，$\rho\tilde{X}$ 在 V_1,V_2 及 V_3 上的表达式分别为(5)，(6) 及 (7)，但需乘以 $(-1)^{n-1}$.

命题3.1的证明．读者易于看出，上面得到的 $\rho\tilde{X}$ 的各个坐标表达式相互相容，且为解析的，从而确实定义了 S^2 上的一个解析场.

现在证明赤道 S^1 关于该场为不变的．设 $y\in S^1\cap U_1$，则 $y_1=0$，即 $z_2=\frac{y_3}{y_1}=0$．依(5)所给的表达式，场的第二分量在 y 处为零．同理可知，场的第二分量在 $S^1\cap V_1$ 处也为零，从而 S^1 为不变的．命题证毕．∎

用上法得到的场称之为 X 的Poincaré紧化场，记为 $\mathscr{P}(X)$.

场 $\mathscr{P}(X)$ 已在一紧流形上定义．在实践时，应取它在域 $M=H_+\cup S^1$ 上的限制，其时边界 S^1 就 $\mathscr{P}(X)$ 为不变的．于是 M 在测地投射下成为一个闭圆盘，故知对 $\mathscr{P}(X)$ 可用定理3，由此得出下面的结果.

定理4．设 $X: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为一多项式场，且满足下列条件：

(1) X 的每一奇点为双曲的；

(2) $\mathscr{P}(X)$ 的 S^1 上的奇点均为双曲的；

(3) $\mathscr{P}(X)$ 的每一图为单图.

则 X 只有有限个周期解.

证明．场 $\mathscr{P}(X)$ 在域 $M=H_+\cup S^1$ 上满足定理3的所有条件．因 M 不为一环域，故 $\mathscr{P}(X)$ 在其内只能有有限个周期轨道．另一方面，$\mathscr{P}(X)$ 的周期轨道比之于 X 的周期轨道，其个数或者相

等，或者多一个（相应于 S^1 是或不是周期解），由此定理得证. ▮

注. 满足定理 4 条件的多项式场的集合仍相当大，下一节在讨论此情形时，还将对定义予以精确化.

我们再作一些计算来结束这一节. 这一计算旨在给出有关多项式 P 及 Q 的条件，以便使场 $X=(P,Q)$ 在无穷远只有双曲奇点，或者说，使场 $\mathscr{P}(X)$ 在 S^1 上只有双曲奇点.

记 $P(x,y)=P_0+P_1(x,y)+\cdots+P_n(x,y)$ 及 $Q(x,y)=Q_0+Q_1(x,y)+\cdots+Q_n(x,y)$，其中 P_i 及 Q_i 分别是 P 及 Q 的 i 次项. 读者可以验证，当且仅当

$$F(z_1)=Q_n(1,z_1)-z_1P_n(1,z_1)=0 \tag{8}$$

时，表达式(5)的第一个坐标在 $(z_1,0)$ 处为零. 这也说明，当且仅当 z_1 是多项式 $F(s)=Q_n(1,s)-sP_n(1,s)$ 的实零点时，$(z_1,0)\in S^1\cap(U_1\cup V_1)$ 是场 $\mathscr{P}(X)$ 的奇点. 类似地可以证明，当且仅当 z_1 是 $G(s)=P_n(s,1)-sQ_n(s,1)$ 的实零点时，即有

$$G(z_1)=P_n(z_1,1)-z_1Q_n(z_1,1)=0 \tag{9}$$

时，$(z_1,0)\in S^1\cap(U_2\cup V_2)$ 是场 $\mathscr{P}(X)$ 的奇点.

注意场 $\mathscr{P}(X)$ 在 S^1 上的奇点成对出现，且关于原点对称. 因此，若有 $F(s)\equiv 0$，则必有 $xQ_n(x,y)-yP_n(x,y)\equiv 0$，且 $G(s)\equiv 0$.

设 $(z_1,0)$ 是(5)的奇点. 则场在该点的 Jacobi 阵应为

$$\frac{1}{\sqrt{z_1^2+1}^{\,n-1}}\begin{pmatrix} F'(z_1) & Q_{n-1}(1,z_1)-z_1P_{n-1}(1,z_1) \\ 0 & -P_n(1,z_1) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

若奇点位于 V_1 内，为得出 Jacobi 阵，可乘(10)以因子 $(-1)^{n-1}$. 设 $(z_1,0)$ 是(6)的奇点，则 $(z_1,0)$ 处的 Jacobi 阵应为

$$\frac{1}{\sqrt{z_1^2+1}^{\,n-1}}\begin{pmatrix} G'(z_1) & Q_{n-1}(z_1,1)-z_1Q_{n-1}(z_1,1) \\ 0 & -Q_n(z_1,1) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

若奇点在 V_2 内，则矩阵(11)应乘以 $(-1)^{n-1}$. 由于矩阵(10)及(11)均为三角型的，故其特征值各为主对角线之元. 因此，如有 $F(z_1)\neq 0$，且 $P_n(1,z_1)\neq 0$（或 $G'(z_1)\neq 0$，且 $Q_n(z_1,1)\neq 0$），则奇点均为双曲的.

如果在 S^1 上不存在奇点（此情况当 n 为奇数时有可能出现），

可知 S^1 是 $\mathscr{P}(X)$ 的周期轨道．在此情况下，周期轨道将是一个稳定或不稳定极限环，或将是位于周期轨道填满的环域的内部．事实上，S^1 不可能是个半稳定环．这是因为 S^2 上的场系由中心投射诱导，且因此 y_3^{n-1} 为正．另一方面，如S^1不为一孤立周期轨道，则它必含于一周期轨道的带域中，这从 Poincaré 变换的解析性即可推出．

§4．通 有 性

4.1 **命题．** 令$\bar{F}$是 $\mathscr{X}_n$ 中满足下列条件的向量场X 的集合：

(1) X的每一奇点均为双曲的；

(2) $\mathscr{P}(X)$在 S^1 上的每一奇点均为双曲的．

则 $\mathscr{E}_n = \mathscr{X}_n - \bar{F}_n$ 被包含于 $\mathscr{X}_n$ 的一个仿射代数超曲面中．更精确地说，存在一个多项式函数$\mathscr{R}$：$\mathscr{X}_n \to \mathbb{R}$，$\mathscr{R} \neq 0$，使 $\mathscr{E}_n \subset \mathscr{R}^{-1}(0)$．

为证明这个命题，需要下面定义的，关于两个多项式的结式概念，详见[W]．

考虑两个多项式 $A = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m$ 及 $B = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$，分别与点 $a = (a_0, a_1, \cdots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ 及 $b = (b_0, b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 相对应．这时存在一个具有如下性质的多项式$\mathscr{R}$：$\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$；若$A$及$B$具有公共零点 ρ，则必有 $\mathscr{R}(A, B) = 0$．

事实上，我们有

$$a_0\rho^m + a_1\rho^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

及

$$b_0\rho^m + b_1\rho^{n-1} + \cdots + b_n = 0;$$

逐次乘前一式以 $\rho^{n-1}, \rho^{n-2}, \cdots, 1$，乘后一式以$\rho^{m-1}, \rho^{m-2}, \cdots, 1$，便得到一个线性齐次方程组，具有非零解，即$(\rho^{m+n-1}, \rho^{m+n-2}, \cdots, 1)$，从而其系数的行列式为零．这个行列式，作为$a_0, \cdots, a_m$ 及 $b_0, \cdots, b_n$ 的多项式，便称为A及B的结式，记为$\mathscr{R}(A, B)$．显然

$$
\mathscr{R}(A,B)=\begin{vmatrix}
a_0\cdots a_m & & & \\
& a_0\cdots a_m & & \\
& & \cdots & \\
& & & a_0\cdots a_m \\
b_0\cdots b_n & & & \\
& b_0\cdots b_n & & \\
& & \cdots & \\
& & & b_0\cdots b_n
\end{vmatrix}.
$$

注意，$\mathscr{R}(0,0)=0$.

命题4.1之证明. 给定$\mathscr{X}_n$中一个场$X=(P,Q)$，令$\Delta(P,Q)$是X的Jacobi行列式给出的多项式，即$\Delta(P,Q)(x,y)=\det(DX(x,y))$. 将$P$, Q及$\Delta(P,Q)$视为x的多项式，则依上述方法定义的结式$\mathscr{R}(P,\Delta(P,Q))$及$\mathscr{R}(Q,\Delta(P,Q))$应是$y$及$P$与$Q$的系数的多项式. 再一次将这些多项式视为$y$的多项式，即可考虑结式$\mathscr{R}_1=\mathscr{R}(\mathscr{R}(P,\Delta(P,Q)),\mathscr{R}(Q,\Delta(P,Q)))$. 从而$\mathscr{R}_1$是$\mathscr{X}_n$中定义的多项式，并且容易证明，若$X\in\mathscr{X}_n$有一非初等奇点$(x_0,y_0)$（即$\det(DX(x_0,y_0))=0$），则必有$X\in\mathscr{R}_1^{-1}(0)$.

再令$\sigma(P,Q)$是$DX(x,y)$的迹数给出的(x,y)的多项式，则类似地，可定义一多项式$\mathscr{R}_2$: $\mathscr{X}_n\to\mathbb{R}$, $\mathscr{R}_2=\mathscr{R}(\mathscr{R}(P,\sigma(P,Q)),\mathscr{R}(Q,\sigma(P,Q)))$. 可以推出，若是$X\in\mathscr{X}_n$有一其迹数为零的奇点，则$X\in\mathscr{R}_2^{-1}(0)$. 于是，若$X$不满足命题的条件(1)，则$X\in\mathscr{R}_1^{-1}(0)\cup\mathscr{R}_2^{-1}(0)$.

现在验证$\tilde{F}$的定义中的条件(2)、用第三节的记号，考虑结式$\mathscr{R}_3=\mathscr{R}(F(s),P_n(1,s))$, $\mathscr{R}_4=\mathscr{R}(G(s),Q_n(s,1))$及$\mathscr{R}_5=\mathscr{R}(F(s),F'(s))=\mathscr{R}(G(s),G'(s))$又设存在$\mathscr{P}(X)$的一个非双曲奇点$(y_1,y_2,0)$. 若$y_2\neq1$，则奇点位于$U_1\cup V_1$中，且有$F(y_2/y_1)=0$. 由于奇点非双曲，故必有$F'(y_2/y_1)=0$，或$P_n(1,y_2/y_1)=0$. 从而$X\in\mathscr{R}_3^{-1}(0)\cup\mathscr{R}_5^{-1}(0)$. 因此$X\in\mathscr{R}_4^{-1}(0)\cup\mathscr{R}_5^{-1}(0)$.

综上所述，若取$\mathscr{R}=\mathscr{R}_1\mathscr{R}_2\mathscr{R}_3\mathscr{R}_4\mathscr{R}_5$，则如$X$不满足命题的条件(1)或条件(2)，必有$\mathscr{R}(X)=0$.

易于验证，每一个$\mathscr{R}_i$，$i=1,2,3,4,5$，均为异于零的多项式. ▮

4.2 **引理.** 令 $C=\mathscr{X}_n-\mathscr{R}^{-1}(0)$.

考虑三元组

$$(X,x,l(X,x))\in C\times H_+\times \mathbb{R}_+$$

的集合Γ，其中$\mathbb{R}_+=(0,\infty)$，H_+ 表示S^2-S^1的上半球面，x 属于$\mathscr{P}(X)$的一条鞍点连结线，又$l(X,x)$表示X的过$x\in H_+$的鞍点连结线在S^2上的长度.

则Γ是$\mathscr{X}_n\times H_+\times\mathbb{R}_+$的一个正则解析子流形.

证明. 任给Γ中一个三元组(X,x,l)，取X在x处的法线段L. 当Y甚接近于X时，点$p_\alpha(Y)$(或$p_\omega(Y)$)被显式地定义为$\mathscr{P}(X)$的唯一鞍点，使p_α: $Y\to p_\alpha(Y)$为解析的，其中$p_\alpha(X)$(或($p_\omega(X)=\omega(x)$)是作为$\mathscr{P}(X)$的过x轨道的α极限(或ω极限)的鞍点，如图23所示，

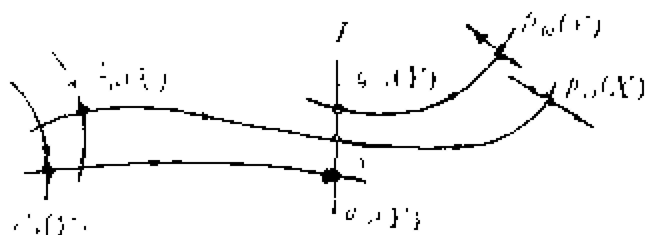


图 23

今以$q_\alpha(Y)$(或$q_\omega(Y)$)记$p_\alpha(Y)$的不稳定分界线(或稳定分界线)与L的第一个交点(见图23).

函数q_α及q_ω在各自的定义域中，即在X的某邻域中，为解析的，这可以通过逐次逼近法，从分界线(或更一般地，不变流形)的存在唯一性证明推出来.

由第四章3.1.4引理2的一个公式，可得：若$F(Y)=q_\omega(Y)-q_\alpha(Y)$，则$dF(X)\neq 0$.

于是根据隐函数定理可知，存在三元组$(X,x,l)\in\Gamma$的一个邻域$V=V(X)\times V(x)\times V(l)$，使$V\cap\Gamma$是这样的三元组$(Y,z,l(Y,z))$的集合，其中$F(Y)=0$，$z=\varphi_Y(t,q_\alpha(Y))$($\varphi_Y$表示$Y$的流)，而$l(Y,z)$是$Y$的过$z$的鞍点连结线在$S^2$上的长度.

从而，Γ为一解析子流形. ▮

4.3 考虑商空间$\tilde{\Gamma}=\Gamma/\sim$，其中关系$\sim$使同一轨线上各点视为同一.

$\tilde{\Gamma}$自然是个解析流形；事实上它有局部参化$F^{-1}(0)$，每一Y依映射关联$\tilde{\Gamma}$中$(Y,p_a(Y),l(Y,p_a(Y)))$的一个类．

设π_1：$\Gamma\to\mathscr{X}_n$为投射，$\tilde{\pi}_1$：$\tilde{\Gamma}$—$\mathscr{X}$是诱导商集的映射；则$\tilde{\pi}_1$是$\tilde{\Gamma}$在$\mathscr{X}_n$中的一个浸没映射（Immersion, Imersão）．一般说来此浸没未必为一双射，但$\tilde{\pi}_1$的像是所有这样的场X的集合，使$\mathscr{P}(X)$的某一鞍点连结线含于S^2-S^1之内．

4.4 **Poincaré 的有限性定理．** 根据 4.3，$\varepsilon_n=\tilde{\pi}_1(\tilde{\Gamma})\cup\mathscr{R}^{-1}(0)$是$\mathscr{X}_n$中可数个解析超曲面的并．特别地，$\varepsilon_n$在$\mathscr{X}_n$中的 Lebesgue 测度为零，从而内域为空．

由此我们断言，对每一$X\in\mathscr{F}_n=\mathscr{X}_n-\varepsilon_n$，$\mathscr{P}(X)$没有图，且依定理 4，至多只有有限个周期轨道．这就是我们所得到的 Poincaré 有限性定理的一个变形．

§5．周期轨道有限性的代数特征

我们现在讨论如下问题：是否存在一个多项式函数P_n：$\mathscr{X}_n\to\mathbb{R}$，$P_n\neq0$，使$P_n(X)\neq0$蕴含$X$只具有有限个周期轨道．

对于$n=1$的情形，即对于线性系统，已知此问题之解为：$P_1(X)=\mathrm{div}X(0)$．

从以下一般性的讨论，可给出一些肯定的结论．

与每一场$X\in\mathscr{X}_n-\mathscr{R}^{-1}(0)$(4.1)相关联，设$S_n$是一函数，定义为所有如下形式的项的乘积：

$$\bar{p}(p_1,\cdots,p_k)=\prod_{i=1}^{k}|\mu_i|-\prod_{i=1}^{k}\lambda_i,$$

其中p_i是$\mathscr{P}(X)$的不同鞍点，又$\mu_i<0<\lambda_i$是$D\mathscr{P}(X)(p_i)$的特征值，而k表示$\mathscr{P}(X)$的鞍点个数．

显然S_n是$\mathscr{X}_n-\mathscr{R}^{-1}(0)$上的解析函数．这样，先消去含于$\lambda_i$，$\mu_i$表达式中的二次根，如此，表达式将逐次增高两次；再反复应用结式消去各个p_i，可知必有$S_n^{-1}(0)\subset Q_n^{-1}(0)$，其中$Q_n$是$\mathscr{X}_n$中的多项式．

由条件 $Q(X)=0$ 推出 X 的每一图均为单图，又依定理 4，X 即仅具有有限个周期轨道．于是多项式

$$P_n=\mathscr{R}\cdot Q_n$$

即为所论问题之解，只消 $Q_n\neq0$．用另一种说法，这便是周期轨道有限性的通有情形（§ 4）．

其次，由于场 $\mathscr{P}(X)$ 在 S^1 上为对称的，故当 n 为偶数时，必有 $Q_n\equiv0$．这是因为鞍点在 S^1 上对称地出现，故函数 $\bar{p}(p_1,\cdots,p_{2l})$ 为零．

当 $n=2l$ 时，目下还难于猜测是否存在一个 $P_{2l}\neq0$．

与 R.Paterlini 讨论获悉，当 n 为奇数时，可有 $Q_n\neq0$，但需依赖于大量运算．

参 考 文 献

[G] Gonzales Velasco E., Generic properties of polynomial vector fields at infinity. Transactions. A.M.S., 143, 1969.

[P] Poincaré H., Sur les courbes définies par une équation différentielle. Obra Completa Vol. 1.

[W] Walker R.J., Algebraic Curves. Dover, 19[illegible].

第三章　结构稳定性

本章将致力于研究平面紧致域(具有光滑边界)上的结构稳定系统。

我们将集中讨论三个基本结果：

(1)关于结构稳定系统的开稠性定理；

(2)关于结构稳定系统的特征化定理；

(3)关于结构稳定定义的广泛性定理.(即一个系统关于任意拓扑等价关系为结构稳定(见定义1.1)的充要条件，是它关于近于恒等映射的拓扑等价关系为结构稳定(见定义1.2).)

其证明将于第二节给出，我们主要致力于阐述基本思想，除了较详细地给出拓扑等价的作法外，其它技巧上的细节可参考本章末所引的文献.

§1.　主要定理的陈述

令 M 为 $\mathbb{R}^2$ 的紧连通域. 设 M 具有光滑边界 ∂M，这相当于说，存在一个 C^r 类实函数 f：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，使

$$M=\{(x,y);\ f(x,y)\geqslant 0\},$$

且对使 $f(p)=0$ 的点 p，

$$df_p=\frac{\partial f}{\partial x}(p)\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}(p)\,dy\neq 0.$$

因此，$\qquad \partial M=\{(x,y);\ f=0\},$

且 $\qquad \mathrm{Int}M=\{(x,y);\ f>0\}.$

今以 $\mathscr{X}^r=\mathscr{X}^r(M)$，$r\geqslant 1$，记 M 上 C^r 类向量场 $X=(P,Q)$ 的集合. 即 P 及 Q 是 $\mathbb{R}^2$ 上 C^r 类函数在 M 上的限制. 今设在 $\mathscr{X}^r$

中已取 C^r 模，其定义为

$$\|X\|_r = \sup_{p\in M}\{|X(p)| + |DX_p| + \cdots + |D^rX_p|\},$$

其中 D^iX_p 记作 X 在 p 处的第 i 阶导数，$|D^iX_p|$ 记作 $\mathbb{R}^2$ 映入 $\mathbb{R}^2$ 的 i 重对称线性函数的模．

1.1 **定义**．称系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = P(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y)\end{cases}$$

或向量场 $X = (P,Q) \in \mathscr{X}^r$ 在 M 上为"C^r 结构稳定"，如果存在 $\delta > 0$，对每一满足 $\|Y - X\|_r < \delta$ 的 $Y = (\bar{P},\bar{Q}) \in \mathscr{X}^r$，存在一个同胚 $h = h_Y$: $M \to M$，使 h 将 Y 的，即

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = \bar{P}(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt} = \bar{Q}(x,y)\end{cases}$$

的每一含于 M 中的轨线弧，保定向地映成 X 的，即（1）的轨线弧．

1.2 **定义**．在定义 1.1 中，进一步设对每一 $\varepsilon > 0$ 有数 $\delta = \delta(\varepsilon)$，使同胚 $h = h_Y$ 与 M 的恒等映射 I_M 为 ε 相近，即

$$|h - I_M| = \sup_{x\in M}|h(x) - x| < \varepsilon,$$

则称（1）为"$C^r - \varepsilon$ 结构稳定"．

M.C.Peixoto 曾建立了下面的定理 8，它证明了定义 1.1 与定义 1.2 的等价性．

1.3 **注**．

a) 在定义中进一步设 h 为拓扑共轭（第一章 § 4），将是个过分的要求．因为这时 h 应是周期轨道的保周期变换；特别地，对于面积在 ∂M 上达到极值的轨线也应如此．显然，这样的附加条件已经超出了结构稳定的范围．

b) 同样，要求 h 为微分同胚，也不是十分明智的做法；取结构

不稳定场 $X=(-x, y)$ 为例，则不可能在场

$$X\varepsilon=(-x, -(1+\varepsilon)y) \text{ 或 } X_a=(-x+2y, -y-ax)$$

与X之间建立可微等价.

可微等价性更应保持相应周期轨道的 Poincaré 变换的可微阶(第一章 5.1).

c) 借用(第一章 3)的术语，我们称定义 (1.1) 及 (1.2) 中的 h_Y是$Y|M$及$X|M$之间的拓扑等价. 根据其性质，此术语又可用于重述定义(1 1)及(1.2)，而要求 h_Y 是 $Y|\Delta_1(M)$ 及 $X|\Delta_2(M)$ 之间的拓扑等价，其中$\Delta_i(M)$，$i=1, 2$，为含M之开集，且$h_Y(M)=M$. 本章所证明的每一定理，在对(1.1)及(1.2)作这种修正时，仍有效.

为了陈述本章的主要定理，我们在 $\mathscr{X}^r$ 中定义下面一些不同子集.

1.4 定义.

$\Sigma(i)$，$i=1, 2, 3, 4$，记下列向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$之集：

$\Sigma(1)$——X的每一奇点 p

a) 均为双曲的，即 DX_p 的特征值具非零实部，

b) 均含于 $\mathrm{Int}M=\{f>0\}$ 内.

$\Sigma(2)$——X的每一周期轨 γ

a) 均为双曲的，用 Poincaré 映射(第一章 5.3)描述，即

$$\pi'(0)=\exp\int_\gamma \mathrm{div}X\neq 1;$$

b) 均含于 $\mathrm{Int}M$ 之内.

$\Sigma(3)$——对每一点 $p\in\partial M$，X 的 过 p 的 轨 道 $\varphi(t, p)$ 匀 断 ∂M；即 或 有 $\dfrac{\partial(f\circ\varphi)(0, p)}{\partial t}\neq 0$，或为 ∂M 上的抛物型切点，即

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)(0, p)}{\partial t}=0 \quad \text{且} \quad \frac{\partial^2(f\circ\varphi)(0, p)}{\partial t^2}\neq 0.$$

$\Sigma(4)$——a) 不存在鞍点连结线；即X 不存在以鞍点为 α 极限集及 ω 极限集的轨线；

b) 不存在X的这种轨线，它以鞍点为其α 或 ω 根限集，且切

于∂M；

c）不存在X的这种轨线，它在两个不同点处切于∂M.

1.5 注.

a）抛物切点条件也可等价地表为 $X^2f(p)=X\cdot(X\cdot f)(p)\neq 0$，其中 $X\cdot f=\frac{\partial f}{\partial x}P+\frac{\partial f}{\partial y}Q$为$f$关于方向$X=(P,Q)$的导数.

b）上述条件不依赖于用来定义∂M的函数f；事实上，若$\bar{f}$为另一个C^2类函数，使$M=\{\bar{f}\geq 0\}$以及$\partial M=\{\bar{f}=0\}$，且对每一$p\in\partial M$，$d\bar{f}_p\neq 0$. 于是存在一个C^1类函数α，使得在∂M中$\bar{f}=\alpha\cdot f$，且$\alpha\neq 0$. 由此得出$\bar{f}\circ\varphi(t,p)=(\alpha\circ\varphi)(t,p)\cdot f\circ\varphi(t,p)$.

依 Taylor 公式，给出

$\bar{f}\circ\varphi(t,p)=(\alpha\circ\varphi(t,p))[a_1t+a_2t^2+O(t^2)]=\bar{a}_1t+\bar{a}_2t^2+\bar{O}(t^2)$，从而有

$\bar{a}_1=\alpha(p)\cdot a_1$，且若$a_1=\bar{a}_1=0$，则$\bar{a}_2=\alpha(p)\cdot a_2$.

c）若$\frac{\partial^2(f\circ\varphi)(0,p)}{\partial t^2}>0$，则切点称为内切点，此时如果取$\varepsilon$甚小，则轨线$\varphi(t,p)$当$0<|t|<\varepsilon$时将保持于$\text{Int}M$之中. 若$\frac{\partial^2(f\circ\varphi)(t,p)}{\partial t^2}<0$，则切点称为外切点. 在这种情况下，对上述甚小的$\varepsilon$，轨线位于$M$之外. 在图24中，

$(f\circ\varphi)(t)=a_1t+a_2t^2+O(t^2)$

1）$a_1>0$，轨线向内；

2）$a_2<0$，轨线向外；

3）$a_1=0$，$a_2>0$，内切点；

4）$a_1=0$，$a_2<0$，外切点.

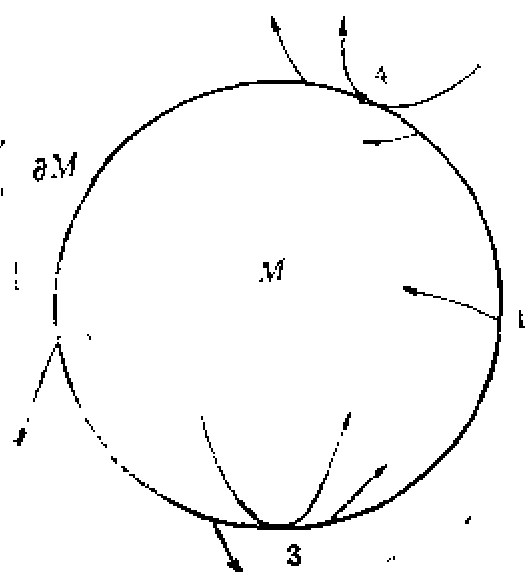


图 24

d）显然，抛物切点是孤立的，且被∂M的两种弧段分隔；在一种弧段上X指向M之内，另一种弧段上X指向M之外. 理由如下：在一切点p处，有$X\cdot f(p)=$

0，且 $X^2f(p)$ 是函数 $X\cdot f$ 沿 ∂M 的切方向，即沿方向 $X(p)$ 的导数。

e) 注意，当且仅当图 25 所示的各种情况不出现时，$X\in\Sigma(4)$ · 图 25 的各情况如下：a) 鞍点连结线，a′) 鞍点奇闭轨；b) 切于 ∂M 上的鞍点分界线；c) 在 ∂M 上有两个切点的轨道.

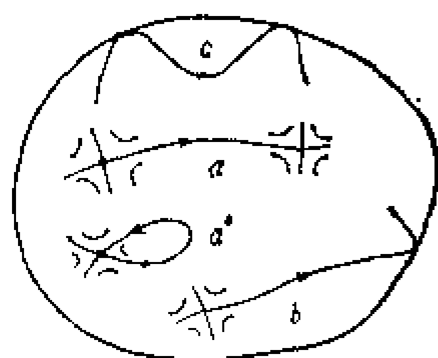


图 25

1.5 **主要定理的陈述.**

定理1. 由

$$\Sigma^r=\bigcap_{i=1}^{4}\Sigma(i)$$

定义的集合 $\Sigma^r=\Sigma^r(M)$，在 $\mathscr{X}^r$ 中开且稠，$r\geqslant1$.

定理 2. 每一 $X\in\Sigma^r$ 均为 C^r-ε 结构稳定(见定义 1 2).

定理 3. 每一 $X\in\mathscr{X}^r$，$r\geqslant1$，当且仅当 $X\in\Sigma^r$ 时，X 为 C^r 结构稳定(见定义 1.1).

§2. 主要定理的证明

我们将定理 1 的证明分成两个命题

2.1 **命题.** 集合 $\Sigma^r(M)=\bigcap_{i=1}^{4}\Sigma^r(i)$ 在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中为开，$r\geqslant1$.

证明. 设 $p_1,p_2,\cdots p_k$ 为 X 的吸型或斥型奇点；$\gamma_1,\gamma_2,\cdots\gamma_l$ 为 X 的周期轨，$s_1,s_2,\cdots s_m$ 为 X 的鞍点，又 $q_1,q_2,\cdots q_n$ 是 X 在 ∂M 上的切点.

选取 X 在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中的一个邻域 ϑ 及 α 的一个邻域 $V(\alpha)$，其中 $\alpha=p_i,\gamma_j,s_k,q_e$，使得

a) $V(p_i)$ 及 $V(\gamma_j)$ 分别为圆盘和圆环，又设对每一 $Y\in\vartheta$，其

边界光滑且为Y所匀断，每一$Y \in \vartheta$在$V(p_i)$及$V(\gamma_j)$中分别有唯一奇点$P_i(Y)$及唯一周期轨$\gamma_j(Y)$，与p_i及γ_j有同一类型，即它们为双曲，且各与p_i及γ_j同为吸型或斥型.

b) $V(s_k)$为圆盘，且对每一$Y \in \vartheta$在$V(s_k)$中有唯一鞍点$s_k(Y)$，Y匀断地交于$\partial V(s_k)$，且有四个抛物外切点，过$V(s_k)$的每一轨道都匀断地交于$\partial M \cup \partial V(p_i) \cup \partial V(s_k)$，除去四个鞍点分界线$S_k^i(Y)$，$i=1,2,3,4$，其余的各趋于两个端点.（见图26.）

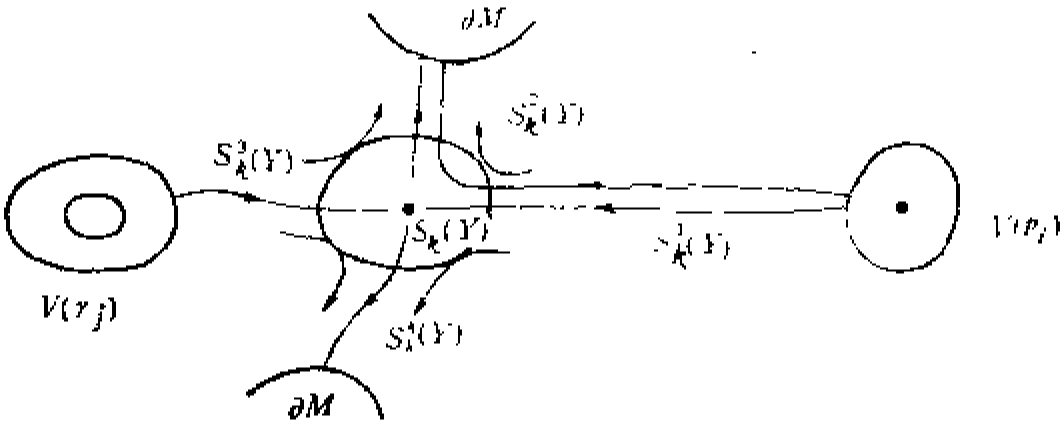


图 26

c) $V(q_e)$为圆盘. 每一$Y \in \vartheta$在$V(q_e)$中有唯一抛物切点$q_e(Y)$，落于∂M上，且与q_e有同一类型；即对于X，它与q_e有相同的外切或内切性.

在内切情形，Y的过$V(q_e)$的每一轨线必匀断地与$[\partial M-\{q_e\}] \cup \partial V(p_i) \cup \partial V(\gamma_j)$相交，且各趋于其两端点.

在外切情形，Y的过$V(q_e) \cap (M-\{q_e\})$的每一轨线必匀断地与∂M交于它们的两个端点，作为q_e邻域的点，见图27.

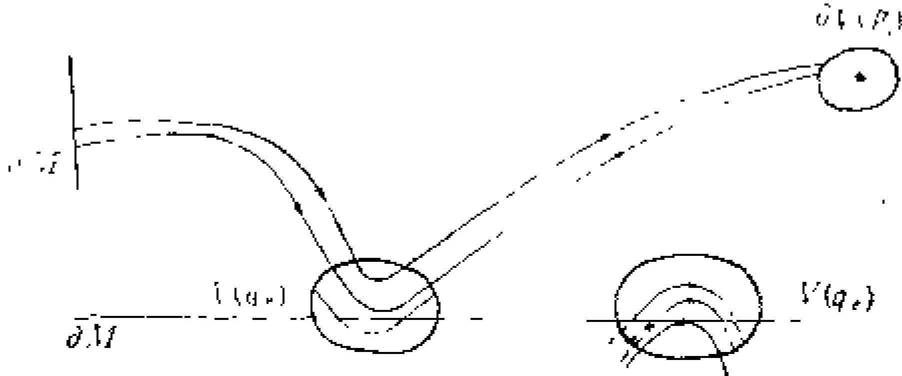


图 27

(d 令 M' 是邻域 $V(p_i)$, $V(\gamma_j)$, $V(s_k)$ 的并在 M 中的余集. M' 为紧，且 Y 的每一轨线弧在有限时间内离开 M'，匀断地交于 $\partial M'$ 而趋于自身的两个端点.

条件 a)—d) 的每一个所表示的重要性质在向量场的微小扰动之下，均能保持不变.

例如，我们来证明 a) 及 b).

奇点 $p_i(Y)$ 连续依赖于 Y，其存在唯一性在 $0\in\mathbb{R}^2$ 的邻域中给出了 Y: $M\to\mathbb{R}^2$ 的一个反函数，故 $p_i(Y)=Y^{-1}(0)$，Y^{-1} 为 Y 的局部逆. 为得出此结论，可对 $F(Y, p)=Y(p)=0$，应用 Banach 空间的隐函数定理，因 $D_2F(X, p_i)$ 为可逆的，故 $V(p_i)$ 的匀断性可从 X(或 $-X$) 的奇点 p_i 的渐近稳定性推出，因为此时存在 Ляпунов 函数[8,p.74].

此函数的等倾面之一为 $\partial V(p_i)$. 对于局期轨的情况，可选择一个邻域 $V(\gamma_i)$，其边界由两条局期轨 $\gamma_i(\theta_0)$ 构成，它们近于 γ_i，是将 X 的方向旋转角 θ_0 (θ_0 为甚小，且异于零) 而得到的场 $R_\theta X$ 的周期轨. 此种曲线 $\gamma_i(\pm\theta_0)$ 的存在性应是 Poincaré-Bendixson 定理的推论[8,p.264].

$\gamma_i(Y)$ 的唯一性可以从 Y 的(取一匀断于 γ_i 的截线段得到的) Poincaré 映射 π_Y 的 C^r 阶的连续性推出. 这从 π_Y 原始定义(第一章 §5)：$\pi_Y(u)=\xi_Y\circ\varphi_Y(T, u)$ 得出，其中 φ_Y 为 Y 的流，ξ_Y 系依管状流定理所定义(第一章 3.8)，T 表示 γ_i 的周期. 则 ξ_Y 及 $\varphi_Y(T, \cdot)$ 都 C^r 阶依赖于 Y. 因为前者系对流 $\varphi_Y(\ ,\ )$ 运用反函数定理而给出定义，而此定理也具有 C^r 阶连续性，只要分析一下存在性定理的原始证明即可推知[8,p.242]; 对于第一章定理 (1.1) 之前讨论中所定义的流 $\varphi(t, u, Y)$，应用隐函数定理也可得出这个结果，因为 π_Y 可依 $\pi_Y(u)=\varphi(T+t(u, Y), u, Y)$ 定义，其中 $t(u, Y)$ 已依 $g(\varphi(T+t(u, Y), u, Y))=0$ 隐式定义，又 $\{g=0\}=L$ 为匀断截面.

因此，依条件 a)—d)，ϑ 在 $\mathfrak{X}^r(M)$ 中具有一个整个含于 $\Sigma^r(M)$ 中的邻域. 2.1 证毕. ▌

2.2 定理2的同胚的作法.

设 $V(p_1),\cdots,V(p_s)$ $V(\gamma_1),\cdots,V(\gamma_n)$ 是命题2.1证明中所定义的集，分别对应于X的奇点和周期轨道的邻域.

鞍点 $s_k(Y)$ 的稳定分界线和 $q_k(Y)\in\partial M$ 的内切轨道在 $V(p_i)$, $V(\gamma_j)$ 的边界上确定一个开弧段，其每一端点是所说轨线割边界时所得到的点. 这时，在Y指向M内域的连通分支上，也可定义一个弧段，其每一端点是鞍点 $s_k(Y)$ 的稳定分界线以及$q_k(Y)$的内切轨道与 ∂M 匀断相交的点，以及，最后，内切与外切点 $q_k(Y)$ 本身.

Y 的轨线在此等弧 α_Y 的内域匀断地切割边界 $\partial V(p_i)$, $\partial V(\gamma_j)$. 在弧 ω_Y 上，匀断地切割边界 ∂M.

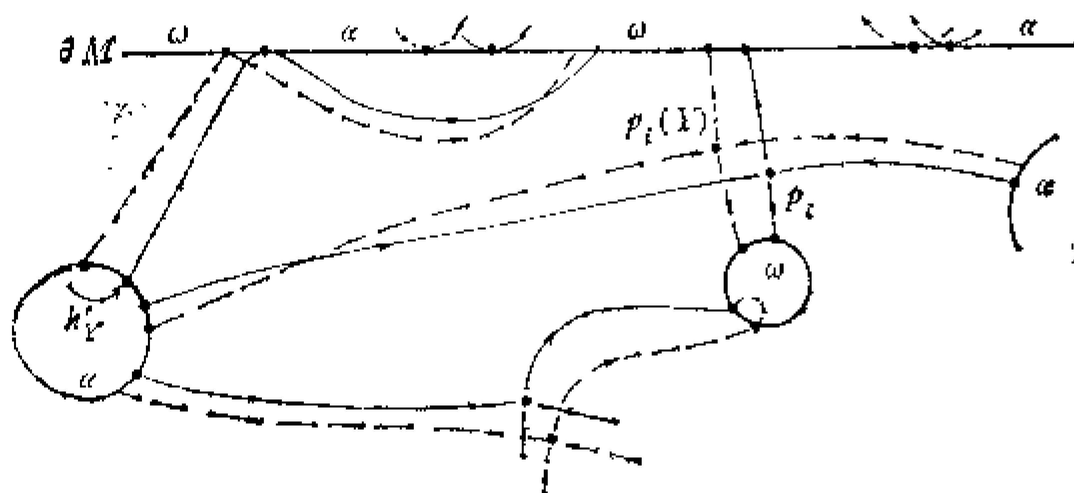


图 28

这些所谓弧 α_Y 的端点将随Y而连续改变；从而有可能作出这些端点与 X 相应的端点之间的一一对应，以便将这个对应扩张到弧的内域. (见图28). 兹以 $h'(Y)$ 记这个扩张，它在

$$\partial M\cup\left[\bigcup_{i=1}^{s}\partial V(p_i)\right]\cup\left[\bigcup_{j=1}^{n}\partial V(\gamma_j)\right]$$

上定义，且弧 α_Y 被映成弧 α_X. 今设 $h_Y=Id$，考虑Y 在 α_Y 以及$\omega^Y=\alpha_{(-Y)}$ 之间的与这些弧的内点匀断相交的轨线所成的域，称之为正则域，这个域是拓扑积 $\alpha_Y\times[0,1]$ 的微分同胚像.

我们证明，正则域仅有图28所列出的八种，对每一$Y\in\vartheta$，有

可能作出Y的和X的正则域之间的一一对应，这样就可以在这些区域的匀断截线之间定义一个同胚h'_Y，于是，先对每一正则域的闭包扩张h'_Y，而后在$V(p_i)$及$V(\gamma_j)$的内域扩张h'_Y．

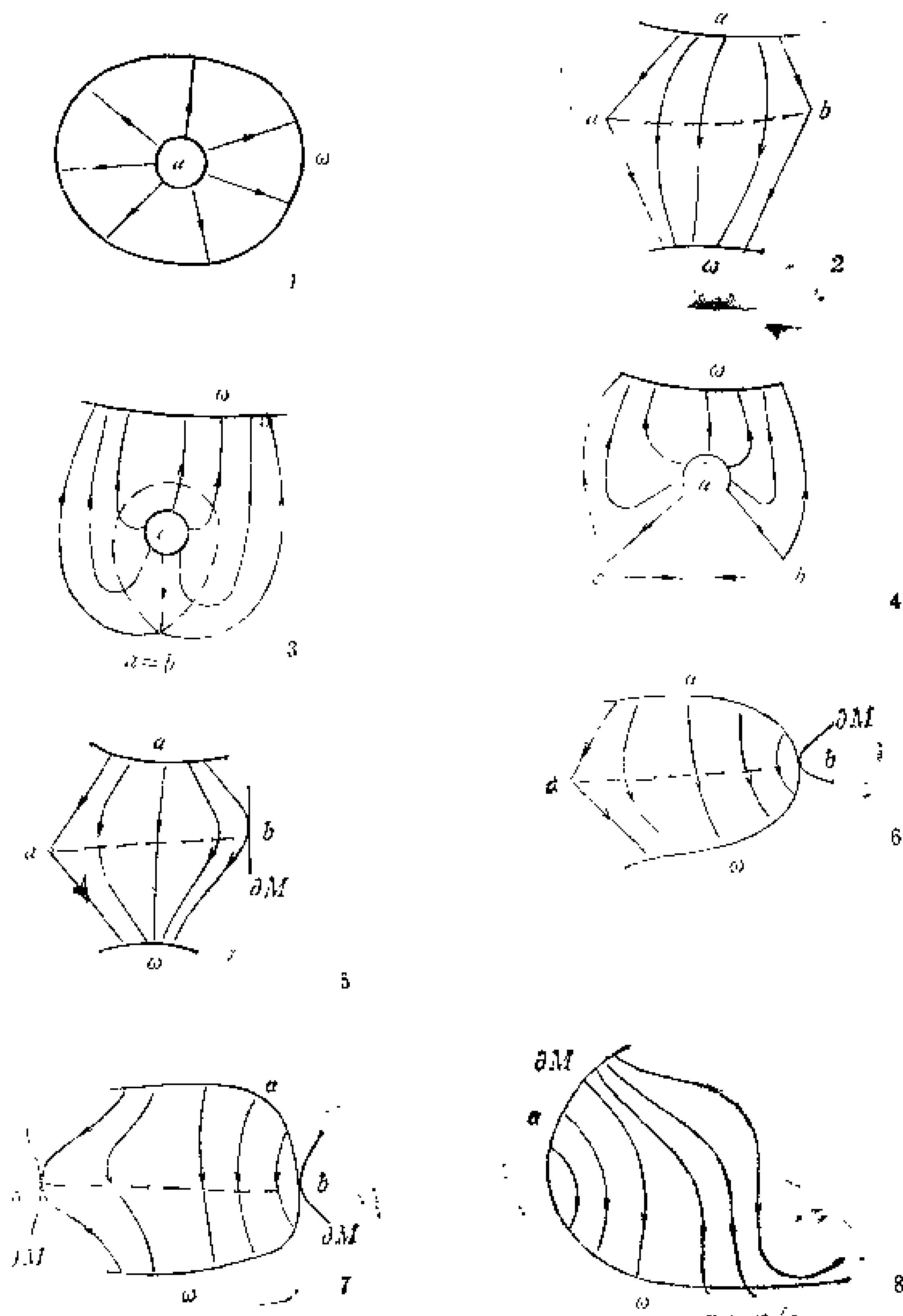


图 29

现就图28的域1,2,3的情形指出上述扩张的作法。

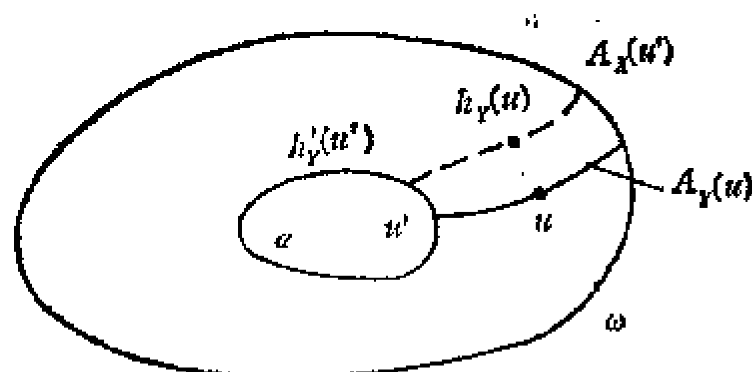


图 30

(1) 将Y的过u的轨线$A_Y(u)$的每一弧映成X的过$h_Y'(u')$的轨线弧，其中u'是弧$A_Y(u)$与曲线α的交点；$h_Y(u)$定义为X的轨线$A_X(u')=A_X(h_X'\cdot(u'))$上的这样的点，使弧$\overrightarrow{h_Y'(u')h_Y(u)}$的长度$|\overrightarrow{h_Y'((u'h_Y(u)}|$与$A_X)h_Y'(u'))$的弧的长度的比等于$|\overrightarrow{uu'}|$与$A_Y(u)$的长度的比；即有

$$\frac{|\overrightarrow{u'u}|}{|\overrightarrow{A_Y(u)}|}=\frac{|h_Y'(u')\overrightarrow{h_Y(u)}|}{|\overrightarrow{A_X(u')}|}.$$

根据上述作法，我们就说，弧$A_Y(u)$依弧长比被映成弧$A_X(u')$。

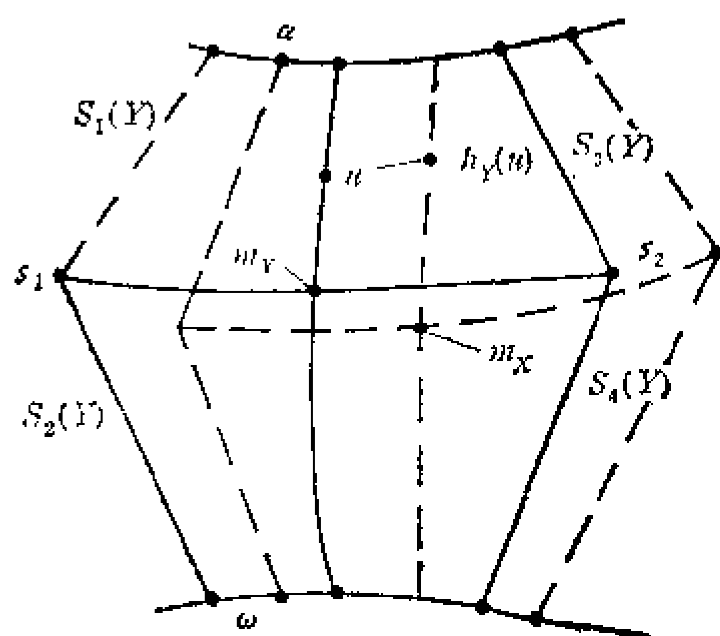


图 31

（2）对此情形，我们也将把Y的鞍点分界线的弧依弧长比映成X相应的鞍点分界域去．以下列方式定义曲线m_Y作为鞍点s_1及s_2的连结线．$m_Y(v)$是弧$A_Y(v)$上分比为$\mu(v)$的点，其中μ是个连续函数，在α的端点处等于$|\vec{S}_1(Y)|/|\vec{S}_1(Y)|+|\vec{S}_2(Y)|$，在别处等于$|\vec{S}_3(Y)|/|\vec{S}_3(Y)|+|\vec{S}_4(Y)|$．（见图31）．同胚$h_Y$即由$m_Y(v)$映成$m_X(v)$而确定，其中$v'=h'_Y(v')$．是$Y$的过$v$的轨线被$m_Y(v)$划分的每一条弧，依弧长比被映成$X$过的$V'$的轨线被$m_X(v')$划分的弧段．要指出的是，情形（3）及(4)可按情形(2)同法处理，因为(3)是情形(2)令a及b合并成单一鞍点时的极限情形．如图29-2′所示．而情形(4)中的内切点则可作为一鞍点来处理．

剩下来要做的，是在区域$V(p_i)$及$V(\gamma_i)$内部扩张h_Y．与前一情形中弧长比的方法不同，现用轨道关于时间的自然参数化，见图32a．

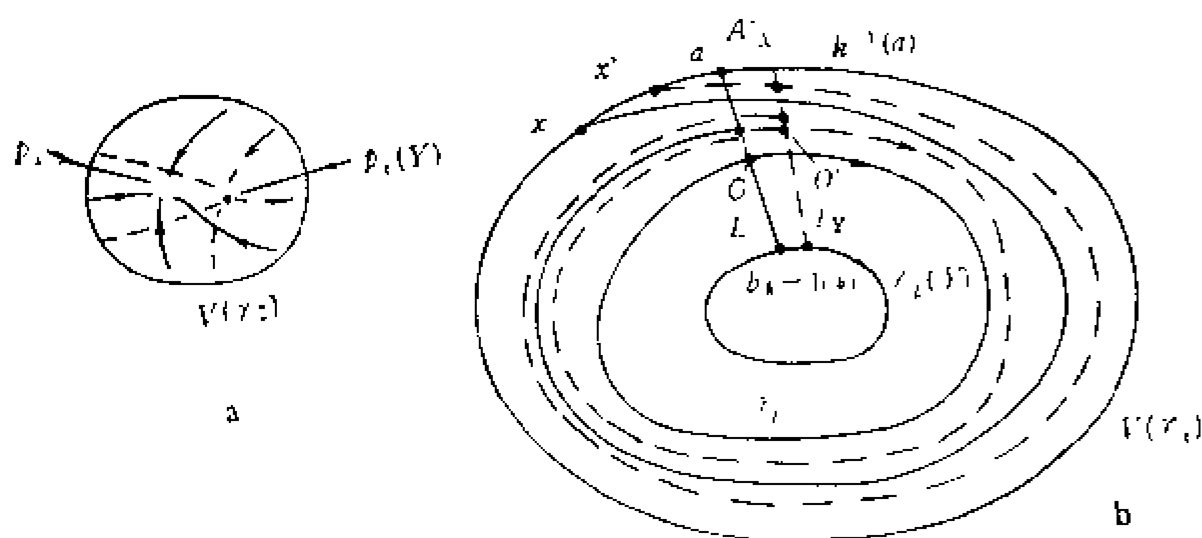


图 32

对后一种情形，则更增添了复杂性．

设$L=L_X$是X的匀断截线，其端点a及b在$V(\gamma)$中，而交γ于唯一点$O=O_X$．当Y逼近于X时，设L_Y是过$h_Y^{-1}(a)$及$h_Y^{-1}(b)$

的线段，交 $\gamma_i(Y)$ 于唯一点 $O'=O_Y$. 今在 $V(\gamma_i)$ 中扩张 h_Y，依弧长比 $\overset{\frown}{O_Y O_Y'} \to \overset{\frown}{O_X O_X}$ 将 $\gamma_i(Y)$ 映成 γ_i.由于Y的过 $x'\in\partial V(\gamma_i)$的轨道 $A_{x'}(Y)$ 交 L_Y 于一个点列 $A^1_{x'}(Y)$, $A^2_{x'}(Y)$, …, 故可将每一弧 $\overset{\frown}{A^i_{x'}(Y)A^{i+1}_{x'}(Y)}$依弧长比映成 $\overset{\frown}{A^i_x(X)A^{i+1}_x(X)}$, $i=0, 1, 2$, …, 其中 $A^0_{x'}(Y)=x$ 以及 $x'=h_Y^{-1}(x)$. 见图 32b.

这就完全定义了 Y 的轨线弧到 X 的轨线段的对应 h_Y: $M\to M$. 由作法可知 h_Y 是一个同胚. 当 $Y\to X$ 时, $h_Y\to Id$. 详细情形见[P-P]. 2.2 得证. ▌

构造拓扑等价的其它方法，见 [P-M].

定理 1 的稠密性，则可由下述命题推出.

2.3 命题. 设M是 $\mathbb{R}^2$ 的连通紧域，具有 C^2 类光滑边界，设 X是$\mathbb{R}^2$ 中的 C^1 类向量场.

则依(1.3)定义的集合

$\mathscr{X}_1(X)=\{(v,\theta)\in\mathbb{R}^3;\ R_\theta(X+v)\notin\Sigma^1(M)\}$,

在$\mathbb{R}^3$ 中具有 Lebesgue 零测度；其中 $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$, 又 $\Sigma^1(M)=\bigcap_{i=1}^{4}\Sigma^1(i)$.

证明. 设 $K(X)$ 是 $X|M$ 的临界值之集，即这样的值 v 的集合，使得满足 $X(p)=v$ 的点 $p\in M$, DX_p 不为满射(即 DX 的行列式在 p 处为零). 依 Sard 定理[s, sa]可知集 $K(X)$具有 Lebesgue 零测度，且因 $X(\partial M)$ 为一零测度集的像，故

$$C(X)=K(X)\cup X(\partial M)$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中亦是零测度. 对于使 $-v\notin C(X)$的每一 $v\in\mathbb{R}^2$, $X+v$在 ∂M 上无奇点，且在M中的每一奇点均为简单的 $(\Delta\neq0)$.

兹往证明，$-v\notin C(X)$ 蕴含

$$\mathscr{X}_1(X,v)=\{\theta\in\mathbb{R};\ R_\theta(X+v)\notin\Sigma^1(M)\} \qquad (*)$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中具零测度.

只要注意对每一 $\theta\in\mathbb{R}$, 当 v 使 $-v\in C(X)$ 时，有 $R_\theta(X+v)\notin\Sigma^1(M)$, 即可给出证明，事实上，依 Fubini 定理[F]. 对于

$\mathscr{X}_1(X)$ 这个闭集(从而也是 $\mathbb{R}^3$ 中的可测集),有

$$\iint X(\mathscr{X}_1(X))\,dv d\theta = \iint [X(\mathscr{X}_1(X, v))\,d\theta]dv = 0,$$

其中 $X(A)$ 表示A的特征函数. 我们现在证明, 对 $-v \notin C(X)$ 由 $\mathscr{X}_1^i(X, v) = \{\theta \in \mathbb{R};\ R_\theta(X+v) \notin \Sigma^1(i)\}$ 定义的每一$\mathscr{X}_1^i(X, v)$, $i = 1, 2, 3, 4$, 是 $\mathbb{R}^2$ 中的零测度集. 于是有关 (*) 的结论即可从 $\mathscr{X}_1(X, v) = \bigcup_{i=1}^{4} \mathscr{X}_1^{(i)}(X, v)$ 得出.

(1) $\mathscr{X}_1^1(X, v)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中有零测度.

对每一 $R_\theta(X+v)$ 的非鞍型奇点 p, 即有 $\Delta > 0$, 故知

$$\sigma(\theta) = \mathrm{trace}[DR_\theta(X+v)(p)].$$

注意 $\sigma'(\alpha) \neq 0$, 当$\sigma(\alpha) = 0$ 时. 此可由表达式

$$\sigma'(\alpha) = -\sin\alpha(P_y(p) - Q_y(p)) + \cos\alpha(P_x(p) + Q_x(p))$$

推出. 可见 σ 的零点必为孤立点, 由此用旋转向量场理论即可证明 $\sigma(\theta)$ 在每一形如 $(a, a+\pi]$ 的区间中,有唯一零点. σ 的每一零点对应于一个非双曲焦点.

由 $-v \notin C(X)$ 可推出$\mathscr{X}_1^1(X, v) = \{\alpha, \sigma(\alpha) = 0\}$ 具有零测度.

2) $\mathscr{X}_1^2(X, v)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中有零测度.

此集是下列集合的并.

A) 使 $R_\theta(X+v)$ 至少有一个含于 Int$M$ 中的非双曲周期轨的 θ 值之集;以及

B) 使 $R_\theta(X+v)$ 的每一周期轨均与 ∂M 相切的 θ 值之集.

先证明,集合

$S_v = \{(x, \theta) \in M \times \mathbb{R};\ R_\theta(X+v)$ 是过 x 的周期轨 $\}$ 是个 C^1 类正则曲线.

事实上,对每一$(x_0, \theta_0) \in S_v$, 设 $\Pi(u, \theta)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的场 $(R_\theta(X+v), 0)$ 的过 (x_0, θ_0)的周期轨道在匀断截线 $\Omega = L \times (\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$ 上所取的Poincaré 映射. 这时有 $\Pi(u, \theta) = (\pi(u, \theta), \theta)$, 其中 $\pi(u, \theta)$ 是 L上关联 $R_\theta(X+v)$ 的 Poincaré 变换.

可以证明(参看第四章3.1.2的引理1注2)

$$\frac{\partial\pi}{\partial\theta}(x_0,\theta_0)=\int_0^T\exp\left[-\int_0^t \operatorname{div}X\right]|X+v|^2dt>0.$$

从而 $S_v\cap\Omega=\{\pi(u,\theta)=u\}$ 局部地为一函数 $\theta=p(u)$ 之图，由此得以证明，若 $(x_0,\theta_0)\in\partial M\times\mathbb{R}\cap S_v$，则 S_v 在此点与 $\partial M\times\mathbb{R}$ 匀断相交；另一方面，若 $\theta=p(u)$ 是 S_v 的局部表示，则

$$\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial\pi}{\partial u}=1,$$

从而当且仅当 $\frac{\partial\pi}{\partial u}=1$ 时，$\frac{\partial\theta}{\partial u}=0$，也就是说，$R_\theta(X+v)$ 的过点 $u,\theta=p(u)$)的周期轨道不为双曲的，从而 S_v 的投射的临界值(局部地)是个依 $\theta=p(u)$．定义的 C^1 类函数，运用Sard定理即可证明，A 是 $S_v\cap(\mathbb{R}\times\operatorname{Int}M)$ 的临界值之集，而由于 S_v 与 $\partial M\times\mathbb{R}$ 匀断，B 是个离散点集.

3) $\mathscr{X}_1^3(X,v)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中为零测度集.

考虑集合

$$T_v=\{(p,\theta)\in\partial M\times[0,\pi],[R_\theta(X+v)\cdot f]_{(p)}=0\}.$$

下面来证明 T_v 是一条 C^1 类正则曲线，它在 θ 轴上投射的临界值 θ_a 对应于使 $R_\theta(X+v)$ 在 ∂M 上有一非抛物型切点的点.

只须就 C^1 场在 ∂M 上没有奇点的情形处理即可. 令 $p\in\partial M$，使 $Y(p)$ 在 ∂M 相切，即 $Y\cdot f(p)=0$.

于是，有 $\frac{\partial}{\partial\theta}(R_\theta Y\cdot f)(p)|_{\theta=0}=Y^\perp\cdot f(p)$，其中 $Y^\perp$ 是 Y 的正交场. 故知 $Y^\perp(p)$ 是 ∂M 的法线，从而 $(Y^\perp\cdot f)(p)\neq 0$，此因 $df_p\neq 0$，且 $(X\cdot f)(p)=0$. 将这一讨论用于 $Y=R_\theta(X+v)$，则从 ∂M 上一或多个函数 ψ 的图的参化事实，即知 T_v 是 C^1 类正则曲线.

显然可见，对 $R(X+v)$ 在 ∂M 上的切点 p_0，当且仅当它不为抛物型时，即 $[R_\theta(X+v)]^2\cdot f(p_0)=0$ 时，有 $\psi'(p_0)=0$. 这可从 $(R_\theta(X+v)\cdot f)(p)=0$ 定义的隐函数 $\theta=\psi(p)$ 的导数表达式推

出. 依 Sard 定理, $\mathscr{X}_1^3(X,v)$ 具有零测度.

4) $\mathscr{X}_1^4(X,v)$ 在R中有零测度.

$\mathscr{X}_1^4(X,v) = A\cup B\cup C$, 其中每一集合分别对应于使 $R_\theta(X+v)$ 不满足定义(3.1)的条件 a), b), c) 的 θ 值.

只消证明每一这样的集具零测度即可.

实际上, A是有限个离散集的并.

由于对 $R_\theta(X+v)$ 的每一对鞍点 p,q, 作为 $R_{\theta_0}(X+v)$ 的q的稳定分界线与p的不稳定分界线重合得到的鞍点连结线$\gamma_{pq}(\theta_0)$, 仅当 $\theta\in V(\theta_0)$ 时, 在 θ_0 的邻域 $V(\theta_0)$ 内方可出现, 但当 $\theta\neq\theta_0$ 时, $R_\theta(X+v)$ 中 p 的稳定分界线与 q 的不稳定分界线则再不相遇, 图 33 画出 $\theta>\theta_0$ 的情形.

于是结论即可从鞍点个数有限, 且每一鞍点仅有四条分界线之事实推知.

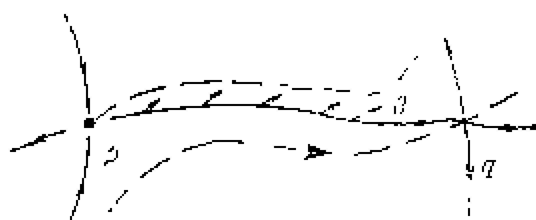


图 33

集合C是一个零测度集与有限个离散集之并.

其中零测度集对应于使 T_θ 为非抛物型切点的 θ 之集, 见 3).

对每一个 θ_0, 使 $R_{\theta_0}(X+v)$ 在 ∂M 上有二个抛物切点 p,q, 且以 p,q 为端点的轨道 γ_{pq}, 必存在一个邻域 $V(\theta_0)$, 使得过 p,q 近旁的切点 p_θ,q_θ 的轨道, 在(3)的曲线 T_V 上当 $\theta=\theta_0$ 时不再相遇, 见图 34.

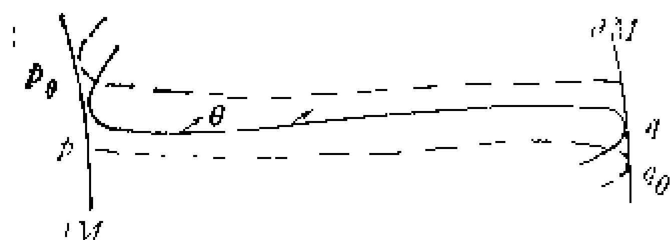


图 34

情形B可综合情形A及C推出, 由此完成命题 2.3 的证明. ∎

2.4 推论. 设$\mathscr{X}_n$是次数$\leqslant n$的多项式向量场之空间, 取其系数的 Tarski 拓扑(第二章). 则 $\mathscr{X}_n\cap\Sigma^1(M)$在$\mathscr{X}_n$中为开稠集.

证明. 开集性质可从包含映射 $\mathscr{X}_n\subset\mathscr{X}^1(M)$ 的连续性导出,

稠密性从(2.3)可知. ∎

类似地可得.

2.5 推论. 令$\mathscr{X}^{\omega}(M)$是解析场的空间,取$\mathscr{X}^{r}(M)$中的诱导拓扑,则$\mathscr{X}^{\omega}(M)\cap\Sigma^{1}(M)$在$\mathscr{X}^{\omega}$中开稠.

依定理2可知,对每一$X\in\Sigma^{r}$,若它为一ε结构稳定,则亦为结构稳定.(见定义1.1.)

定理3的证明由下列命题推出.

2.6 命题. 设X为C^{r}结构稳定,$r\geqslant 1$,(定义(1.1)),则

$$X\in\Sigma^{r}=\bigcap_{i=1}^{4}\Sigma(i).$$

证明. 依稠密性定理可设场X拓扑等价于Σ^{r}的场X_1,它具有性质

a) 有有限个拓扑等价于鞍点或结点的奇点$p_1,\cdots,p_k$.

b) 有有限个吸型或斥型周期轨道$\gamma_1,\cdots,\gamma_s$,分别拓扑等价于双曲周期轨道,且各含于$\mathrm{Int}M$中.

c) 有有限多个内切点$b_1,b_2,\cdots,b_m$,及外切点$c_1,c_2,\cdots,c_n$.

d) 没有鞍点连结线,没有与∂M相切的鞍点分界线,也没有与∂M二重相切的轨道.

我们证明X的每一奇点均为双曲的.设对某一个奇点(不妨取为(0,0)),其局部化不为双曲的.考虑扰动$\mu(x_1,x_2)\varepsilon(x_1,x_2)$,其中$\mu$为一$C^{\infty}$类函数,在(0,0)的小邻域之外为零,在(0,0)处等于1.则扰动场$X_2=X+\mu\varepsilon(x_1,x_2)$在(0,0)处的Jacobi阵是

$$J_{\varepsilon}=\begin{pmatrix}X_{1,1}(0,0)+\varepsilon & X_{1,2}(0,0)\\ X_{2,1}(0,0) & X_{2,2}(0,0)+\varepsilon\end{pmatrix}.$$

其特征值为$\lambda+\varepsilon,\mu+\varepsilon$,其中$\lambda$及$\mu$为$J_0$的特征值.故若(0,0)为$X$的鞍点,取适当的$\varepsilon$,可使$X_{\varepsilon}$为斥型或吸型的.见图34.类似地,若(0,0)为$X$的吸(斥)型奇点,则取适当的$\varepsilon$,可得$X_{\varepsilon}$的一个鞍点或斥(吸)型奇点.

很显然，根据X的结构稳定的假设，X_ε应与X一样有同样个数的鞍点、斥型或吸型奇点. 但可取μ的支集甚小，使X_ε与X的其它奇点类型相同，但$(0,0)$则改变了类型. 由此得出矛盾.

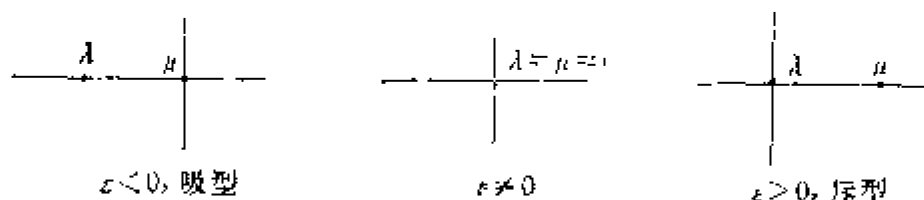


图 35

任取X的周期轨道γ，现证它为双曲的. 对此C^{r+1}类的γ，存在C^r类函数F: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，使$F(p)=0$，且$DF_p\neq0$，对每一$p\in\gamma$.

考虑X的如下扰动

$$X_\varepsilon = X+\mu\varepsilon F\nabla F,$$

其中μ为一C^∞类函数，在γ的一邻域之外为零，在γ上等于1，则

$$\mathrm{div}X_\varepsilon|_\gamma = \mathrm{div}X|_\gamma+\varepsilon|\nabla F^2|_\gamma.$$

从而若$\int_\gamma \mathrm{div}X=0$，且$\gamma$为$X$的吸型(斥型)轨道，则取$\varepsilon>0$ ($\varepsilon<0$)，

$$\int_\gamma \mathrm{div}X_\varepsilon=\varepsilon\int_\gamma|\nabla F|^2>0\,(<0),$$

从而γ为X_ε的斥型(吸型)双曲周期轨. 取μ的支集甚小，可使得在其外，X_ε与X有个数与类型均相同的轨道. 这就与X为结构稳定场的假设矛盾，故必有$\int_\gamma \mathrm{div}X\neq0$.

再证X在∂M上每一切点均为抛物的.

假设$p\in\partial M$是个非抛物切点.

不妨取$p=(0,0)$，又∂M在此点切于X轴，则在$(0,0)$处，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}>0$. 又若$X=(P,Q)$，则$P(0,0)\neq0$且$Q(0,0)=0$.

令

$$X_\varepsilon = X + \varepsilon\mu x\ \overrightarrow{(0,1)},$$

其中 μ 为一 C^∞ 函数，在(0,0)的甚小邻域 ε 外为零，在(0,0)处为1.

直接计算可知

$$(X^2\varepsilon \cdot f)(0,0) = \varepsilon \cdot P(0,0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

选 ε 的符号可使(0,0)成为 X_ε 的外切或内切点.

若(0,0)为 X 的外切点，则必有 $X_\varepsilon^2 \cdot f(0,0) > 0$，于是此点即为 X_ε 的内切点. 这样，象前面一样，得出与 X 为结构稳定相矛盾的结论. 类似地，可讨论(0,0)为内切情形.

若(0,0)既非内切点，也非外切点，则可使其为 X_ε 的拓扑匀断点，从而 X_ε 的内或外切点个数将比 X 少一，这又与 X 的结构稳定性相违，2.6 的证明完成.

在结束本章时，我们指出，定理 1 的证明由 2.1 及 2.3 得到，定理 2 的证明由 2.2 得到，而定理 3，则可从 2.2 及 2.6 推出.

参 考 文 献

[F] Fernândez P. Medida e Integração. Projeto Euclides, CNPq, 1976.

[P-P] Peixoto M. C. e Peixoto M. M. -Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions. An. Acad. Bras. Ciencias, Vol 31, 1959.

[P-M] Palis J., Melo W. -Introdução aos Sistemas Dinâmicos. Projeto Euclides 1978.

[S] Sotomayor J. - Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Projeto Euclides, CNPq, 1979.

[S1] Sotomayor J. -Singularidades de Aplicações Diferenciáveis, ELAM, IMPA, 1976.[1]

[Sa] Sard A. - The measure of the critical values of differentiable maps. B. A. M. S. Vol. 48, 1942.[1]

1) [Sa] 中证明了如下的重要定理："设 $f: A_n \to \Gamma^p$ 为一 C^k 类可微映射，$A_n \subset R^n$ 为开的；若 $k \geq n-p+1$，则 f 的临界值集，即集 $K(f) = \{y = f(x);\ Df(x)$ 非满$\}$，为（R^p中）Lebesque 零测度集." [S1] 将此定理推广到 $k=\infty$ 的情形.

第四章　分　　枝

§1. 引　　言

本章将在具有光滑边界 ∂M 的平面紧域上，致力于 C^r 类($r\geqslant 3$)的单参数微分方程族

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=P(x,y;\lambda),\\ \dfrac{dy}{dt}=Q(x,y;\lambda)\end{cases}\tag{1_λ}$$

的分枝研究. 设 λ 在一紧区域$[a,b]$上变动.

值 $\lambda_0\in[a,b]$称为(1_λ)(或 M 上向量场族 ξ: $\lambda\to(P(\cdot,\cdot;\lambda),Q(\cdot,\cdot;\lambda))$)的分枝值，若对 λ_0 在 $[a,b]$ 中的每一邻域 $V(\lambda_0)$，存在 λ_1，使(1_{λ_0})，即$(\xi(\lambda_0))$，不与(1_{λ_1})，即$(\xi(\lambda_1))$，在 M 上拓扑等价；或者更精确些，即不存在一个同胚 h: $M\to M$，它将(1_{λ_0})的轨线弧保定向地映为(1_{λ_1})的轨线弧.

今在平面 $\mathbb{R}^2$ 上讨论依赖于实参数λ的(1_λ)型微分方程族(或向量场族$\xi(\lambda)$)的分枝的一些典型例子.

1.1　鞍结点　　$\xi(\lambda)=(x^2+\lambda,\ -y)$.

一个鞍点与一个结点($\lambda<0$)，当 $\lambda=0$ 时迭合而构成一个鞍结点；当 $\lambda>0$ 时，此奇点消失. (见图36.)

1.2　复合焦点　(Андронов-Hopf 分枝)

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y-x[\lambda+(x^2+y^2)],\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y[\lambda+(x^2+y^2)].\end{cases}$$

一个不稳定焦点及一个稳定环($\lambda<0$)，当 $\lambda=0$ 时迭合而构成一弱吸引焦点；当 $\lambda>0$ 时，它变为一双曲吸引焦点. (见图37.)

1.3　半稳定环.

$X_\lambda=R_\lambda X$，其中X具有一半稳定环，例如

$$X = ([(x^2+y^2)^{1/2}-1]^2 x - y, [(x^2+y^2)^{1/2}-1]^2 y + x);$$

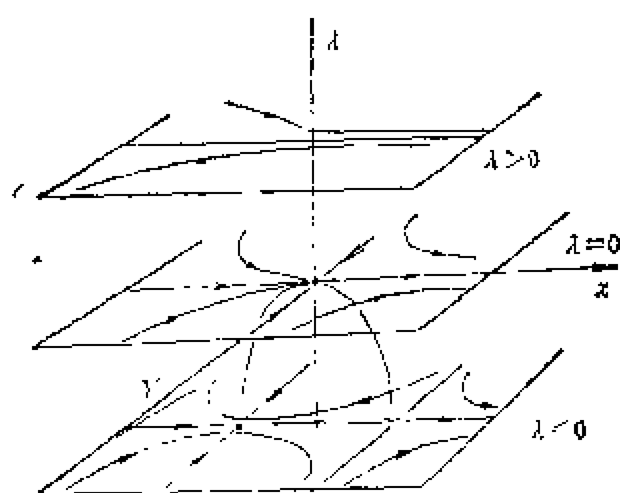


图 36

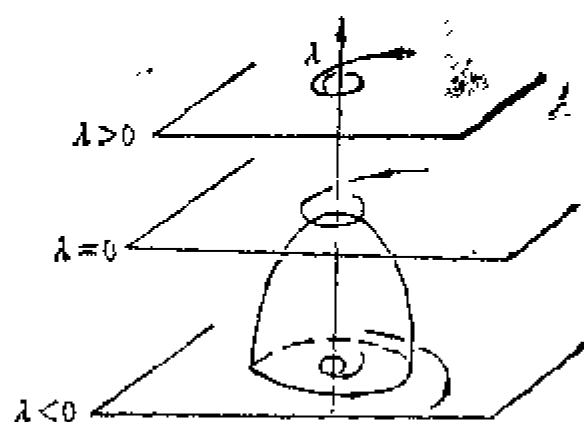


图 37

R_λ 表示辐角 λ 之旋转

$$R_\lambda = \begin{pmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda \\ \sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}.$$

一个吸引环及一个不稳定环(λ>0)，当 λ=0 时迭合而构成一个半稳定环；当 λ<0 时，这种环消失.

图中抛物线表示周期轨线族的局部截面；其上每一点表示族的Poincaré 变换的不动点(见图38)。

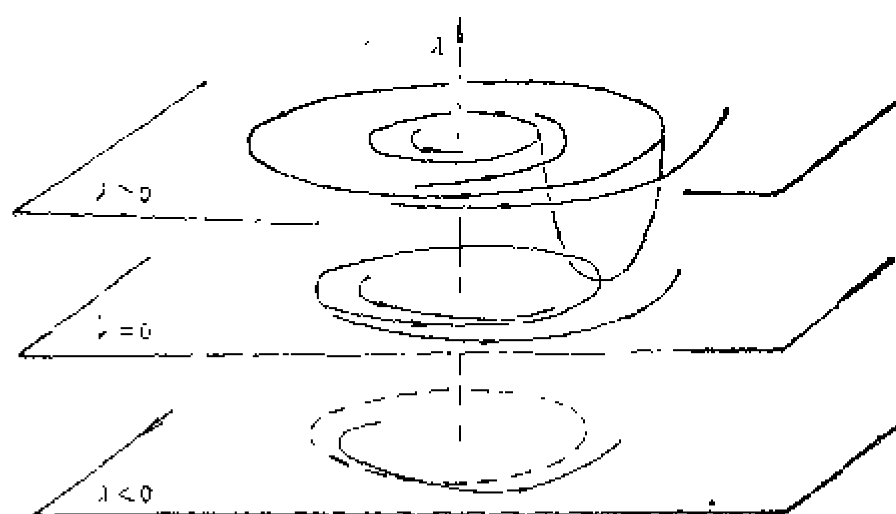


图 38

1.4 鞍点连结线.

$\xi(\lambda) = R_\lambda X$，其中 X 有一条鞍点连结线；R_λ 则如前例，为一旋转.

情形 a） **两相异鞍点的连接**

相异鞍点 p_1 及 p_2 的两条分界线，($\lambda<0$)，当 $\lambda=0$ 时迭合而构成一条鞍点 p_1 及 p_2 的联结线；当 $\lambda>0$ 时，分离成两条分界线。(见图39a.)

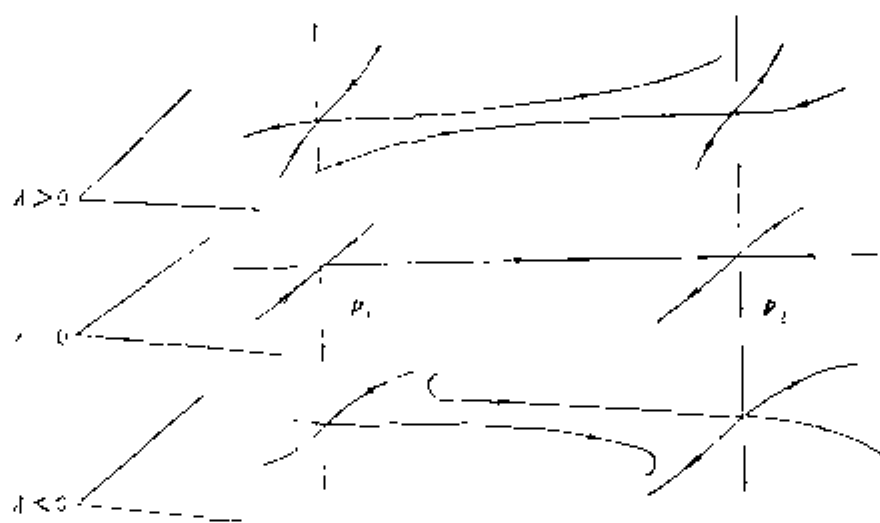


图 39a

情形 b） **通过同一鞍点的回道**

若鞍点重合，$p_1=p_2=p$，而构成X的一条吸引回道. 则 $\lambda>0$，鞍点分界线分离，而出现一条吸引环，它由鞍点的不稳定分界线的 ω 极限集得来. (见图39b.)

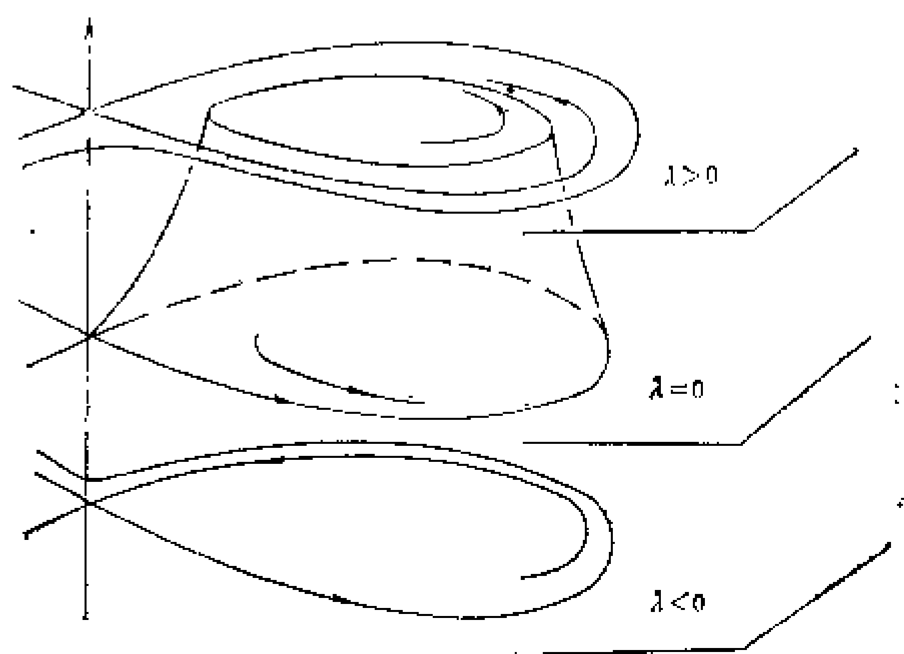


图 39b

1.5 鞍结点迴道.

若是在例 1.1 中，鞍结点的两个双曲扇形的分界线合并成同一结点域，如图 39，则当 $\lambda>0$ 时，出现一个吸引环(见图 40).

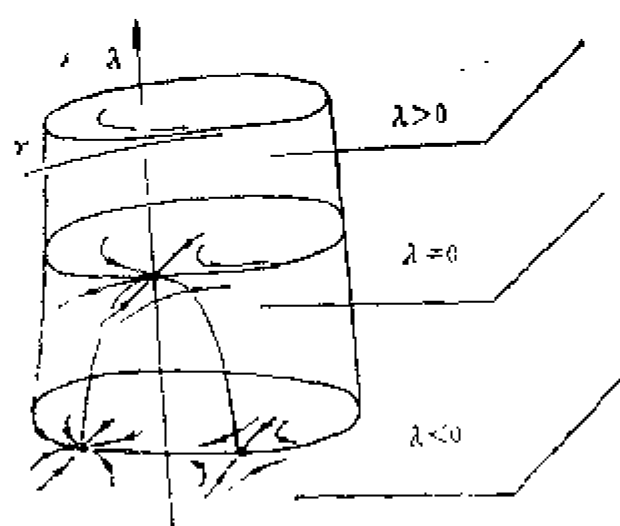


图 40

1.6 半稳定环消失而产生的鞍点联结线.

若在例 1.3 中，鞍点分界线在两侧盘近一个半稳定环 ($\lambda=0$)，则当此环消失后，对于一个无限序列 $\{\lambda_n\}$，$\lambda_n\to 0$，即出现场 X_{λ_n} 的一条不断崩紧的内外鞍点联结线.（见图 41.）

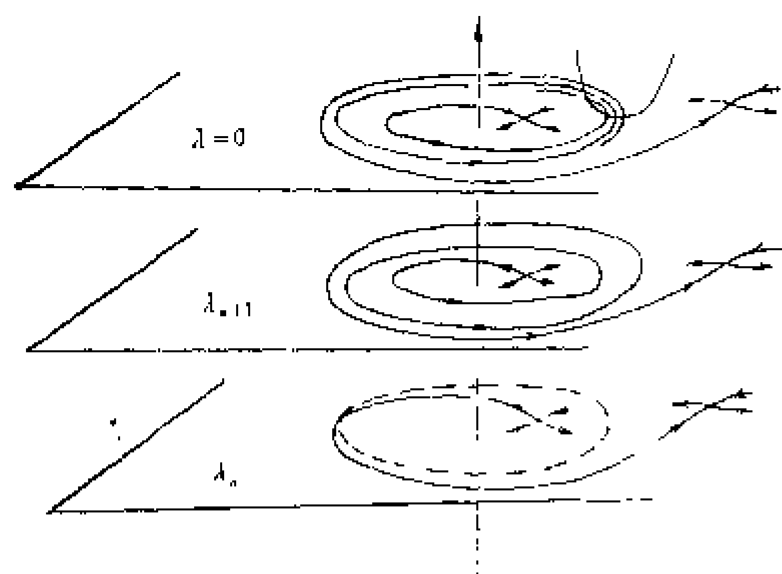


图 41

1.7 鞍点迴道消失而产生的鞍点联结线.

若是对例 1.4 中的回道，鞍点分界线以此迴道为 ω 极限集，则当迴道消失时 ($\lambda<0$)，对于一无限序列 $\{\lambda_n\}$，$\lambda_n\to 0$，出现不断崩紧的，场 X_{λ_n} 的以迴道内鞍点的不稳定分界线为原始鞍点稳定分界线的鞍点连结线.（见图 42.）

本章将给出微分方程族 (1_λ) 的结构稳定分枝的一个刻划. 就

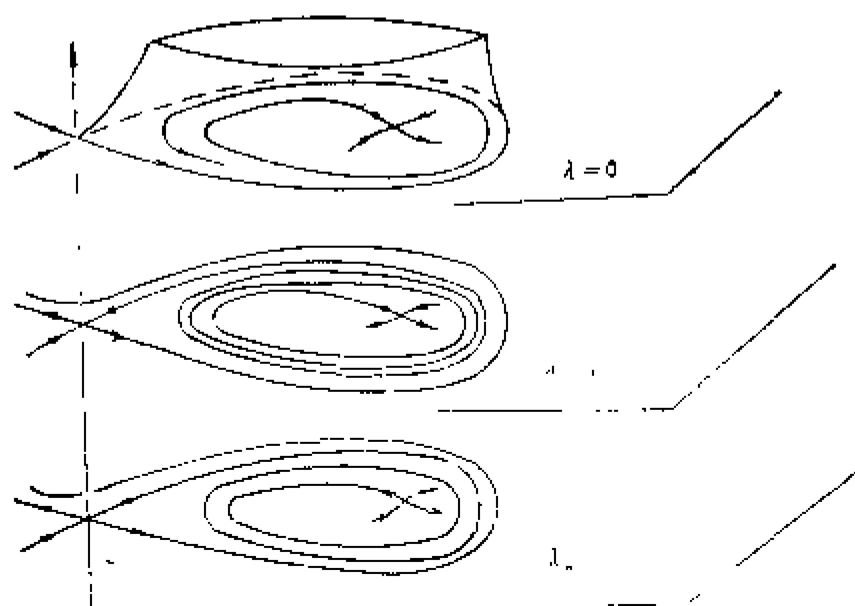


图 42

是说，我们要研究的系统，当试验模型有所更动而越过分枝值时，对于族(1_λ)中函数 P,Q 的微小扰动，不会有定性上的改变. 讨论结果表明，在 Int$M$ 中可能出现的仅有的结构稳定分枝，即为上述各例所说的类型. 改变向量场在 ∂M 处的切性，将会导致别的稳定分枝的出现，这也属于本章讨论的范畴.

结构稳定分枝研究的基本线索是，对于 $\mathscr{X}^r-\Sigma^r$ 中微小形变为结构稳定的类 $\mathscr{X}^r-\Sigma^r$ 的子集 Σ_1^r. 就像 $\mathbf{R}^n$ 中的超曲面一样，这是个 $\mathscr{X}^r-\Sigma^r$ 中余维为一的子集.

一个族相对于分枝性而言，被当作 $\mathscr{X}^r$ 中的一条曲线，它匀断 Σ_1^r，且匀断性在族的微小扰动下能得以保持. 因此，一个扰动的族将与原始族具有同类型的分枝，且对应于 Σ_1^r 中一个点.

流形 Σ_1^r 整含于 Андронов 及 Леонтович[A] 所定义的一阶结构稳定场的类 $\mathring{\Sigma}_1^r$ 之中. 后者对于 $\mathscr{X}^r-\Sigma^r$ 的，取 $\mathscr{X}^r$ 诱导的拓扑而得到的微小扰动为结构稳定的. $\mathring{\Sigma}_1^r$ 应是 Σ_1^r 的浸没部分，它们对应于孤立稳定分枝，但流形 $\mathring{\Sigma}_1^r$ 与 $\Sigma_1^r-\mathring{\Sigma}_1^r$ 相密接. 要刻划此种非孤立的结构稳定分枝，麻烦之处便是要设法弄清楚此种密接现象. 为此有必要首先刻划 $\Sigma_1^r-\mathring{\Sigma}_1^r$ 的与 $\mathscr{X}_1^r$ 分层密接的那些子集. 这件事便是定理 3 中用诱导拓扑对 Σ_1^r 的内域进行的

刻划．我们的定理1及定理2则是刻划Σ_1^r及$\bar{\Sigma}_1^r$的，而在定理4中我们将刻划结构稳定分枝，且证明它具有通有性．

§2．主要结果的陈述

为陈述本章的主要定理，我们在$\mathbb{R}^n$中具有C^r类光滑边界的紧连通区域M上，对于所有C^r类非结构稳定场的空间$\mathscr{X}^r-\Sigma^r$，定义其下面的各种子集．

2.1 首先我们回忆结构稳定场的集的定义

$$\Sigma^r=\Sigma^r(1)\cap\Sigma^r(2)\Sigma^r(3)\cap\Sigma^r(4).$$

2.1.1) $\Sigma^r(1)=\Sigma^r(1,a)\cap\Sigma^r(1,b)$，其中

$\Sigma^r(1,a)$为M中每一奇点均为双曲的场的集合．

$\Sigma^r(1,b)$为奇点落入∂M的场的集合．

2.1.2) $\Sigma^r(2)=\Sigma^r(2,a)\cap\Sigma^r(2,b)$，其中

$\Sigma^r(2,a)$为位于M中的周期轨线均为双曲的场的集合．

$\Sigma^r(2,b)$为位于M中的周期轨线均与∂M不交的场的集合．

2.1.3) $\Sigma^r(3)$为这样场的集合，场在∂M处的切点，即$X\cdot f(P)=0$的点，均为抛物型切点，即$X^2f(P)\neq0$的点．

2.1.4) $\Sigma^r(4)=\Sigma^r(4,a)\cap\Sigma^r(4,b)\cap\Sigma^r(4,c)$，其中

$\Sigma^r(4,a)$为在M中不存在奇点分界线的场的集合．

$\Sigma^r(4,b)$为M中轨道至多只有一点与∂M相切的场的集合．

$\Sigma^r(4,c)$为奇点每一分界线都与∂M匀断相交的场的集合．

2.2 再定义 $\mathscr{X}^r-\Sigma^r=\bigcup_{i=1}^{4}(\mathscr{X}^r-\Sigma^r(i))$ 的如下的一些子集

下列冗长的定义，其本意在于强调用于确定Σ^r的条件具有极小形式．

2.2.1) $\Sigma_1^r(1)=\Sigma_1^r(1,a)\cup\Sigma_1^r(1,b)$，其中

$\Sigma_1^r(1,a)$是$\Sigma^r(1,b)\cap\Sigma^r(2)\cap\Sigma^r(3)\cap\Sigma^r(4)$的这样的场$X$的集合，它有唯一奇点$p$，在$M$中非双曲，且为鞍结型，或复合焦点型．奇点$p$称为$X$的鞍结点，若$DX(p)$有一个特征值$\lambda_0=0$以

及另一个特征值 $\lambda_1 \neq 0$。如果 v_0 及 v_1 是相应的本征向量，则可得

$$D^2X(p)(v_0^2) = a_0 v_0 + a_1 v_1, \quad a_0 \neq 0.$$

(见图 43a.)

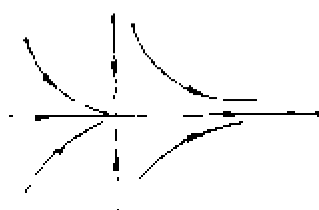


图 43a

一个鞍结点有两个双曲域和一个结点域；有两条分界线构成结点域边界，有一条分界线分隔两双曲域. 一个奇点 p 称为复合焦点，若是 $DX(p)$ 具有纯虚数特征值，且回复映射 ρ: $I_0 \to I$（在过 p 的一线段上由 X 的轨线定义）的三阶导数，在 p 点处异于零.
(见图 43b.)

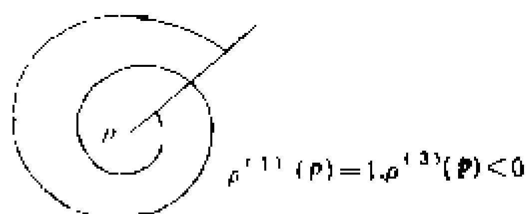


图 43b

在有必要区分这两种情形时，以 $\Sigma_1^r(1,a,s-n)$ 及 $\Sigma_1^r(1,a,f-c)$ 分别记 $\Sigma_1^r(1,a)$ 的具有一个鞍结点及复合焦点的场的子集.
(见图 43a 和图 43b.)

$\Sigma_1^r(1,b)$ 表示 $\Sigma^r(1,a) \cap \Sigma^r(2) \cap \Sigma^r(3) \cap \Sigma^r(4)$ 的这样的场 X 的集合，X 在 ∂M 上有唯一奇点 p，为如下类型之一：

焦点——$DX(p)$ 的特征值为复共轭，虚部异于零；

鞍点——$DX(p)$ 具实特征值，且异号. 对应的特征向量匀断 ∂M.

结点——$DX(p)$ 有相异实特征值，但同号；相应的特征空间匀断 ∂M.

必要时，以 $\Sigma_1^r(1,b,f)$，$\Sigma_1^r(1,b,s)$ 或 $\Sigma_1^r(1,b,n)$ 分别记 $\Sigma_1^r(1,b)$ 的在 ∂M 上有一个焦点，一个鞍点或一个结点的场的集合

(见图 43c, d, e).

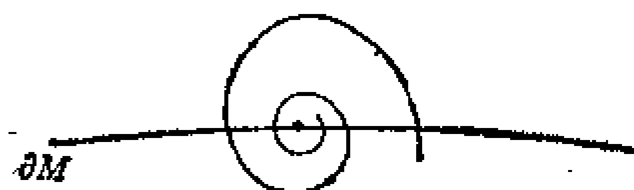


图 43c

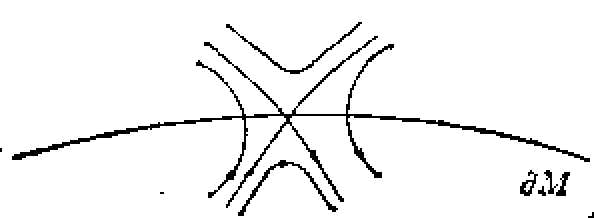


图 43d

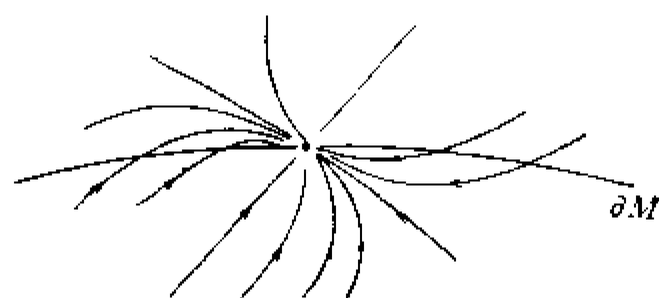
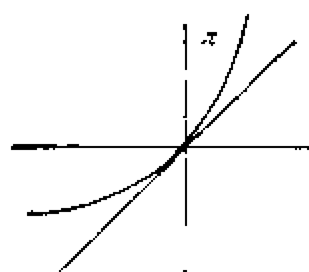


图 43e

2.2.2) $\Sigma_1^r(2)=\Sigma_1^r(2,a)\cup\Sigma_1^r(2,b)$,

其中 $\Sigma_1^r(2,a)$ 为 $\Sigma_1^r(1)\cap\Sigma^r(2,b)\cap\Sigma^r(3)\cap\Sigma^r(4)$ 的场的集合，这种场具有唯一非双曲周期轨道，即 $\pi'(0)=1$，且半稳定，$\pi^{(2)}(0)\neq 0$，其中 π 表示 Poincaré 变换.

$\Sigma_1^r(2,b)$ 为 $\Sigma^r(1)\cap\Sigma^r(2,a)\cap\Sigma^r(3)\cap\Sigma^r(4)$ 的场的集合，这种场在 M 中有唯一周期轨道与 ∂M 相切.



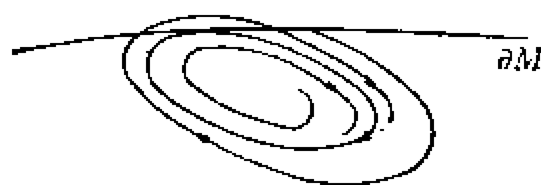


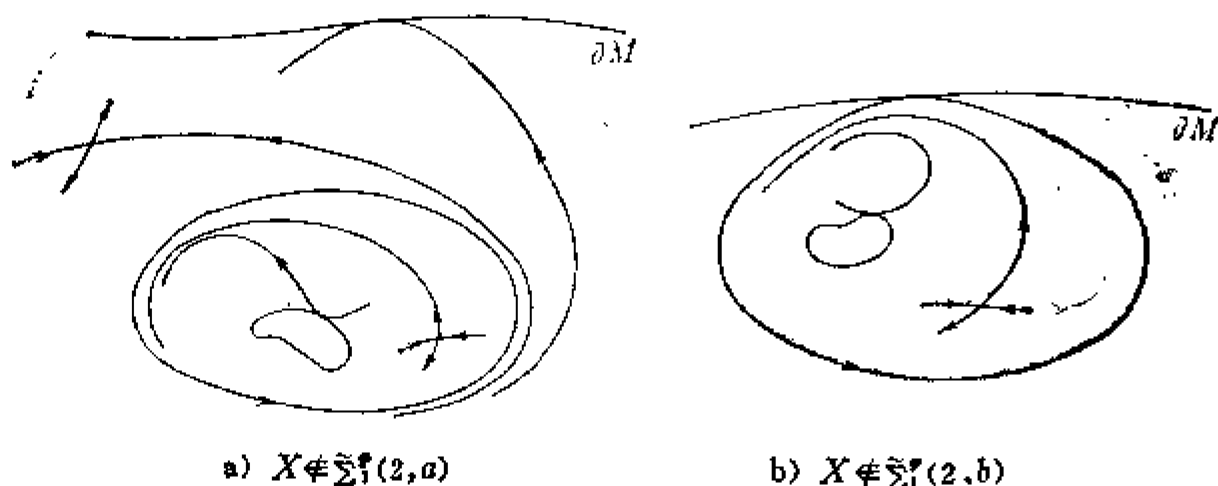
图 44a　　图 44b

2.2.3) 必要时，还要区分下述子集:

$\tilde{\Sigma}_1^r(2,a)$，由 $\Sigma_1^r(2,a)$ 这样的场组成，场的半稳定环不能同时成为鞍点分界线或与 ∂M 相切的轨道的 α 与 ω 极限集.

$\tilde{\Sigma}_1^r(2,b)$，由 $\Sigma_1^r(2,b)$ 这样的场组成，它的与 ∂M 相切的周期

轨道既不是鞍点分界线或别的切于 ∂M 的轨道的 α 极限集，也不是它们的 ω 极限集.



a) $X \notin \Sigma_1^r(2,a)$　　b) $X \notin \Sigma_1^r(2,b)$

图 45

2.2.4)　$\Sigma_1^r(3)$ 是指 $\Sigma^r(1) \cap \Sigma^r(2) \cap \Sigma^r(4)$ 的场X的集合，这种场在 ∂M 上的唯一切点不为抛物型，即 $X \cdot f(p) = X^2 \cdot f(p) = 0$，但为三次切点，即 $X^3 f(p) = 0$.

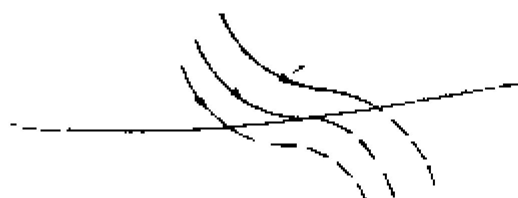


图 46

2.2.5)　$\Sigma_1^r(4) = \Sigma_1^r(4,a) \cup \Sigma_1^r(4,b) \cup \Sigma_1^r(4,c)$

$\Sigma_1^r(4,a)$ 是 $\Sigma^r(1) \cap \Sigma^r(2) \cap \Sigma^r(3) \cap \Sigma^r(4,b) \cap \Sigma^r(4,c)$ 的场的集合，这种场有唯一分界线 γ 含于 $\mathrm{Int}M$ 中，其α 及 ω 极限集为X的鞍点 p 及q，若$p=q$，则γ 构成一个简单迴道(第二章§2)，以p 为顶点. 若用迹数来表示，即有条件

$$\sigma(p) = \mathrm{trace}DX(p) \neq 0.$$

若 $\sigma(p) < 0 (> 0)$，则 $\frac{|\mu|}{\lambda} > 1 (< 1)$，迴道为吸型(斥型)，其中 $\lambda > 0 > \mu$ 为 $DX(p)$的特征值. 见(第二章§2).

$\Sigma_1^r(4,b)$是 $\Sigma^r(1) \cap \Sigma^r(2) \cap \Sigma^r(3) \cap \Sigma^r(4,a) \cap \Sigma^r(4,c)$

的场的集合，这种场在M中有唯一轨道，与∂M恰有两个切点.



图 47a

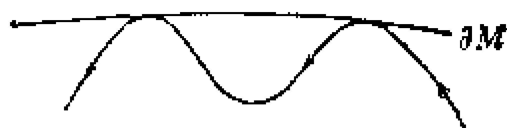


图 47b

$\Sigma_1^r(4,c)$是 $\Sigma^r(1)\cap\Sigma^r(2)\cap\Sigma^r(3)\cap\Sigma^r(4,a)\cap\Sigma^r(4,b)$ 的向量场的集合，这种场有唯一鞍点分界线与∂M相切.

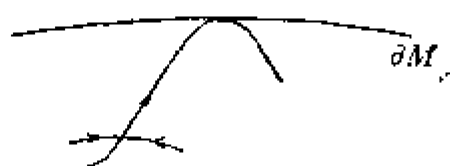


图 47c

2.2.6) 今后，必要时在 $\Sigma_1^r(4,a)$ 中区分具有相异鞍点联结线的场的集，以及具有廻道的场的集. 前者记为 $\Sigma_1^r(4,a,d)$，后者记为 $\Sigma_1^r(4,a,l)$.

此外，犹有必要区分出 $\Sigma_1^r(4,a,l)$ 中的子集 $\tilde{\Sigma}_1^r(4,a,l)$：其中场的廻道$\gamma$既不是鞍点分界线或切于$\partial M$的轨道的$\alpha$极限集，也不是它们的$\omega$极限集.



图 48

以 $\tilde{\mathfrak{X}}^r$ 记取 $\mathfrak{X}^r$ 中诱导拓扑的空间 $\mathfrak{X}^r-\Sigma^r$. 若V是X在 $\tilde{\mathfrak{X}}^r$ 中的一个邻域，以$C(X,V)$记V的含有X的连通分支.

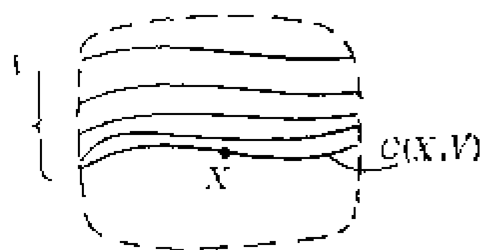


图 49

以 $\mathfrak{X}_1^r$ 记取如下拓扑的空间 $\mathfrak{X}^r-\Sigma^r$，此拓扑使$C(X,V)$组成X的一个邻域基本组. 常称此种拓扑为 $\mathfrak{X}^r-\Sigma^r$ 的“内蕴拓扑”，见

图 49.

设 $X\in S$，其中 S 是 $\mathscr{X}^r(M)$ 的一个子集，$\mathscr{X}^r(M)$ 已取定拓扑 σ，使包含映射 $(S,\sigma)\to\mathscr{X}^r$ 为连续的.

2.3 **定义.** 称 X 关于 S 中的微小扰动为结构稳定的，或关于 S 为结构稳定的，若存在一个 X 的在 σ 下的邻域 $\dot{U}=\dot{U}(X)$，使得对每一 $\dot{Y}\in\dot{U}$ 存在同胚 $h=h_Y$: $M\to M$，将 Y 的轨道弧映到 X 的轨道弧，并保持定向.

因此，一个对 $\widetilde{\mathscr{X}}^r$ 中的微小扰动为稳定的向量场，一定是一个一阶结构稳定场[A,S1,S2].

注. 扩张公式以 2.2 定义. 例如 $\sum_1^r(2,b)$，是 $\mathscr{X}_1^r$，$r\geqslant1$ 中这样的场 X 的子集，使得

a) X 在 M 中的每一奇点均为双曲的，且含于 $\mathrm{Int}M$ 中；

b) X 在 M 中的周期轨均为双曲的，且仅有一个 γ 含于 $\mathrm{Int}M$ 中，γ 可与 ∂M 有唯一的切点，且为抛物型切点；

c) X 在 ∂M 上的每一切点均为抛物型的；

d) 在 M 中，X 没有与 ∂M 相切于两个不同点的轨道，没有鞍点联结线，也没有切于 ∂M 的鞍点分界线.

2.4 **现在可以陈述本章的主要结果.**

定理1. 设 $r\geqslant4$，

$$\sum\nolimits_1^r=\bigcup_{i=1}^{4}\sum\nolimits_1^r(i),$$

其中 $\sum_1^r(i)$ 如 2.2 所定义，则

a) 对每一 $X\in\sum_1^r$，存在 $\mathscr{X}^r$ 中的邻域 V，及 C^{r-1} 类函数 F: $V\to R$，使 $dF_X\neq0$，且 $F(X)=0$；而连通分支 $C(V\cap\mathscr{X}_1^r,X)$ 与 $F^{-1}(0)$ 重合，且含于 $\sum_1^r$ 中，又 $F^{-1}(R_+)=\sum^r\cap V$；其中 $R_+=\{\lambda>0\}$. 特别地，取内蕴拓扑时(定义 2.3)，$\sum_1^r$ 在 $\mathscr{X}^r-\sum^r$ 中为开的；

b) 取内蕴拓扑时，$\sum_1^r$ 在 $\mathscr{X}_1^r=\mathscr{X}^r-\sum^r$ 中为稠的；

c) 当且仅当 $X\in\sum_1^r$ 时，场 $X\in\mathscr{X}_1^r$ 对 X_1^r 中的微小扰动为结构稳定的。

2.4.1 **定义.** 用2.2.3)及2.2.6)的记号，令

a) $\tilde{\Sigma}_1^r(2)=\tilde{\Sigma}_1^r(2,a)\cup\tilde{\Sigma}_1^r(2,b)$；

b) $\tilde{\Sigma}_1^r(4)=\tilde{\Sigma}_1^r(4,a)\cup\Sigma_1^r(4,b)\cup\Sigma_1^r(4,c)$，其中 $\tilde{\Sigma}_1^r(4,a)$

$$=\Sigma_1^r(4,a,d)\cup\tilde{\Sigma}_1^r(4,a,l).$$

定理2. 令 $r\geqslant 4$，且

$$\tilde{\Sigma}_1^r=\Sigma_1^r(1)\cup\tilde{\Sigma}_1^r(2)\cup\Sigma^r(3)\cup\tilde{\Sigma}^r(4).$$

则有a) 对每一 $X\in\tilde{\Sigma}_1^r$，存在 $\mathscr{X}^r$ 中邻域 V 及 C^{r-1} 类函数 F：$V\to R$，使 $F(X)=0, V\cap\widetilde{X}_1^r=F^{-1}(0), F^{-1}(R-\{0\})=\Sigma^r\cap V$. 特别地，在取诱导拓扑时，$\tilde{\Sigma}_1^r$ 在 $\widetilde{\mathscr{X}}_1^r=\mathscr{X}^r-\Sigma^r$ 中为开的；

b) $\tilde{\Sigma}_1^r$ 在 $\widetilde{\mathscr{X}}_1^r$ 中为稠的；

c) 当且仅当 $X\in\tilde{\Sigma}_1^r$ 时，场 $X\in\widetilde{\mathscr{X}}_1$ 关于 $\widetilde{\mathscr{X}}_1$ 中的微小扰动为结构稳定的。

2.4.2 以 Γ^r 记单参数向量场族的空间，更精确些，即

$$\Gamma^r=C^1([a,b],\mathscr{X}^r)$$

为$[a,b]$到 $\mathscr{X}^r=\mathscr{X}^r(M)$ 的所有 C^1 类映射的空间，$\mathscr{X}^r$ 中的 C^1 模为：

$$\|\xi\|_r^1=\sup_{\lambda\in[a,b]}\{\|\xi(\lambda)\|_r,\|\xi'(\lambda)\|_r\}.$$

令 Γ^r 的元 ξ 与映射 $\hat{\xi}$：$R^3\to R^2$ 恒同，其中 $\hat{\xi}(x,y,\lambda)=\xi(\lambda)(x,y)$，且使

$$\frac{\partial^{i+j+k}\hat{\xi}}{\partial x^i\partial y^j\partial\lambda^k},\quad i+j=r,k=0,1$$

存在且连续。

将 $\xi\in\Gamma^r$ 解释为 R^3 的向量场是合适的，此时应把它定义为 $(\hat{\xi},0)$，并将其在 λ 轴上的投射作为首次积分，关于这一解释，可参看本章引论中的图形.

2.4.3 **定义.** $\xi\in\Gamma^r$ 称为结构稳定的，若存在 Γ^r 中的一个邻域 ϑ，对每一 $\eta\in\vartheta$，存在一个同胚 μ：$[a,b]\to[a,b]$，使得对 $\forall\lambda\in[a,b]$，$\eta(\lambda)$ 与 $\xi(\mu(\lambda))$ 拓扑等价.

我们将在定理 4 中刻划结构稳定族.

2.4.4 令 S^r 是 $\xi\in\Gamma^r$ 的子集，使得

a) ξ 匀断 Σ_1^r，即若F为定理1所给的函数，且 $F(\xi(\lambda))=0$，则 $dF(\xi(\lambda))\cdot\xi'(\lambda)\neq 0$；

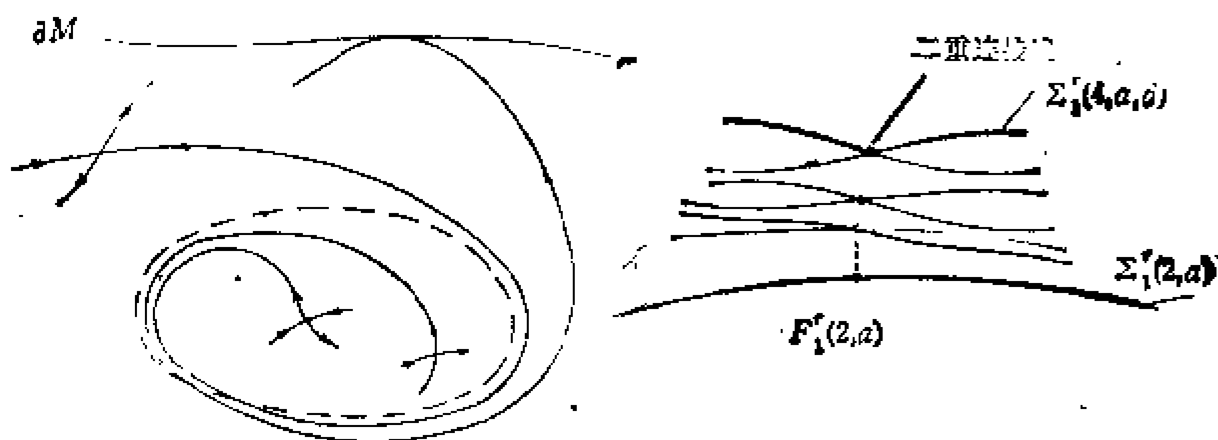
b) $\xi[a,b]\subset(\tilde{I}nt\Sigma_1^r)\cup\Sigma^r$，其中 $\tilde{I}nt\Sigma_1^r$ 是 $\mathscr{X}^r-\Sigma^r$ 在 $\tilde{\mathscr{X}}_1^r$ 中的内域.

我们将在定理3中刻划这一子集.

2.4.5 以 $\Sigma_1^r(2,a,ka,l\omega)$ 记 $\Sigma_1^r(2,a)$ 的场的子集，这种场具有半稳定轨道，作为切于 ∂M 的轨道或是 k 个鞍点分界线的 α 极限集和 l 个鞍点分界线的 ω 极限集. 在此记号下，(2.2.3) 成为 $\tilde{\Sigma}_1^r(2,a)=\Sigma_1^r(2,a,ka,l\omega)$，$k\cdot l=0$.

2.4.6 定义. 以$F_1^r(2,a)$记场 $X\in\Sigma_1^r(2,a,ka,l\omega)$的子集，$k,l\geqslant 2$，使得存在鞍点的两条 a_1,a_2 的分界线(对应的，ω_1,ω_2)，或切于 ∂M 的轨道，其 $\alpha(\omega)$极限集为X的半稳定轨道. 这时对于 θ 的某一任意小的 θ 值，$a_1(\theta)$及 $a_2(\theta)$ 将与 $\omega_1(\theta)$和 $\omega_2(\theta)$ 重合；其中 $\alpha_i(\theta)$，$\omega_j(\theta)$是 α_i，ω_j 关于旋转 $R_\theta X$ 的，依照半稳定轨道消失的幅角方向所得到的自然延拓.

注意，此条件仅与X有关. 在3.2.2中将给定义 $F_1^r(2,a)$ 以定量判则. 见图50.



$F_1^r(2,a)$：对某些甚小的 θ 值的二重连接线.

$\mathscr{X}_1^r$在 F_1^r 的邻域中的部分图形.

图 50

定理3. Σ_1^r 在 $\tilde{\mathscr{X}}_1^r$ 中的内域，记为 $\tilde{I}nt\Sigma_1^r$，将与 $\Sigma_1^r-F_1^r(2,a)$ 重合.

这样，Σ_1^r 构成如下意义的一个薄壳结构而包围 $\tilde{I}nt\Sigma_1^r$：

对每一条路径 $\xi\in\Gamma^r$，使得a) $\xi(\lambda_0)\in\tilde{I}nt\Sigma_1^r$，且b) 它在 λ_0 处匀断 Σ_1^r，则可验证存在 ξ 在 Γ^r 中的一个邻域 ϑ 及 λ_0 在$[a,b]$中的邻域 $V(\lambda_0)$，使得每一 $\xi_1\in\vartheta$ 含于 $\xi_1(V(\lambda_0))\subset\Sigma^r\cup\tilde{I}nt\Sigma_1^r$ 中，且ξ_1 匀断 Σ_1^r，对每一 $\lambda\in V(\lambda_0)$.

由此我们建立一个概念，使得 Σ_1^r 将作为薄壳而密接于 $\Sigma_1^r-F_1^r(2,a)$.

定理4. 1) S^r 在 Γ^r 中开且稠；

2) 当且仅当 $\xi\in S^r$ 时，$\xi\in\Gamma^r$ 为结构稳定的。

§3. 主要结果的证明

本节说明定理1—定理4的证明的基本思想。

首先在3.1节中指出(定理1及定理2)中局部隐式地定义在 Σ_1^r 及 Σ_1^r 上的函数F的作法，此函数在[S₂, S₃, T]中曾作过定义，但现在特别关心的是 dF 的明显表达式. $[S_2]$ 中已建立的表示式，在定理3的薄壳结构的证明中也将要用到.

我们限于在每一个标准情形下详细指出F的作法.

关于定理1及定理2中开性的证明，同样也涉及F的作法.

在3.2节，我们证明定理3，并用图形画出2.2节中定义的在 $\Sigma_1^r(2)$ 中彼此密接而构成 Σ_1^r 及 $\tilde{I}nt\Sigma_1^r$ 的不同部分. 对于某些单参微分方程族出现无限分枝，密接现象是举足轻重的。

定理4将在3.3节中证明.

3.1 定理1及定理2的证明.

3.1.1 命题. 2.2.1中定义的集合 $\Sigma_1^r(r)$，$r\geq 4$，具有下面的性质

a) 对每一 $X\in\Sigma_1^r(1)$，存在 $\mathscr{X}^r$ 中的邻域 V 及一个 C^{r-1} 类函数 F：$V\to R$，使 $F(X)=0$，$dF_X\neq 0$；且使 $F^{-1}(0)=V\cap(\mathscr{X}^r-\Sigma^r)$ 含于 $\Sigma_1^r(1)$ 中；此外，$F^{-1}(R-\{0\})\subset\Sigma^r$，且每一 $Y\in F^{-1}(0)$ 与X拓扑等价；

b) $\Sigma_1^r(1)$取内蕴拓扑时(见2.1)，在$\mathscr{X}_1^r(1)=\mathscr{X}^r-\Sigma^r(1)$中稠；

c) 当且仅当$X\in\Sigma_1^r(1)$时，场$X\in\mathscr{X}_1^r(1)$在$\mathscr{X}_1^r$中为结构稳定的.

依2.1中定义，$\mathscr{X}_1^r$是不满足关于奇点的结构稳定条件的那些场的集合. 而2.2.1中定义的集合$\Sigma_1^r(1)$，则由五个分支之并集组成

$$\Sigma_1^r(1)=\Sigma_1^r(1,a,s-n)\cup\Sigma_1^r(1,a,f-c)\cup\Sigma_1^r(1,b,f)$$
$$\cup\Sigma_1^r(1,b,n)\cup\Sigma_1^r(1,b,s).$$

每一此种子集以极小方式，保证结构稳定的相同条件$\Sigma^r(i)$，$i=2,3,4$，成立(而条件$\Sigma^r(1)$不成立).

为节省篇幅计，仅详细讨论鞍结点情形$\Sigma_1^r(1,a,s-n)$，以及∂M上有结点的情形$\Sigma_1^r(1,b,n)$.

引理1. 设X是具有鞍结点$p\in\mathrm{Int}M$的场，则存在p的邻域$V(p)$，X的邻域$V(X)$，以及C^{r-1}类函数F: $V(X)\to R$，使得对$Y\in V(X)$，$dF(X)\neq0$，且使得

a) 当且仅当Y在$V(p)$中以一鞍结点为其唯一奇点时，$F(Y)=0$；

b) 当且仅当Y在$V(p)$中以一鞍点及一结点为其仅有的奇点时$F(Y)<0$；

c) 当且仅当Y在$V(p)$中无奇点时，$F(Y)>0$.

证明. 设$p=(0,0)$，依2.1.1，可将X的分量写成

$$P(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+P_3(x,y),$$
$$Q(x,y)=\qquad\sigma y\qquad+Q_2(x,y);$$

其中$a,\sigma\neq0$，又$P_3(Q_2)$及其二阶(一阶)导数在(0，0)处为零，为确定计，设$\sigma<0$，$a>0$.

对每一逼近X的场$Y=(P_Y,Q_Y)$，可依

$$Q_Y(x,\psi(Y,x))=0,\quad\psi(X,0)=0$$

隐式地定义一个函数$y=\psi(Y,x)$.

此函数为 C^r 类，这是因为依隐函数定理有 $\frac{\partial\theta_X}{\partial y}(0,0)=\sigma\neq 0$。设 $x=x(Y)$ 是依隐式

$$\frac{\partial}{\partial x}[P_X(x,\psi(Y,x))]=0,\quad x(X)=0$$

定义的函数，则由于

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}[P_X(x,\psi(X,x))]=2a>0,$$

依隐函数定理知 $x=x(Y)$ 为 C^{r-1} 类，显然 $x=x(Y)$ 是 P_Y 限制于曲线 $Q_Y=0$ 上时的极小点.

X 的逼近场 Y 的奇点仍为此限制的零点.

今定义

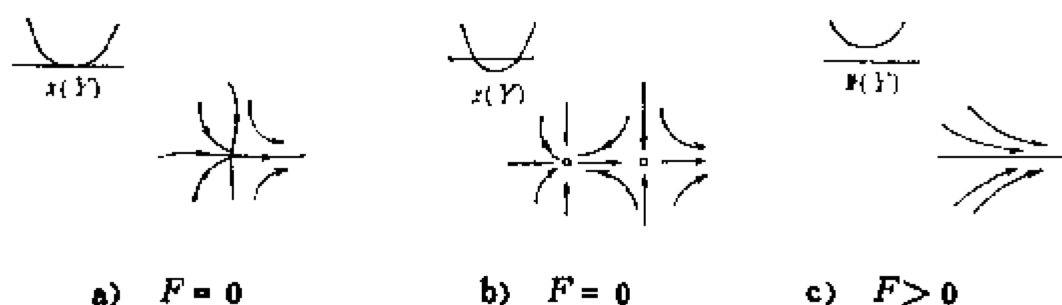
$$F(Y)=P_Y(x(Y),\psi(Y,x(Y))).$$

显然 F 在 X 的一个邻域内为 C^{r-1} 类，直接计算可知，

$$dF_Y(Z)=P_Z(p(Y))-\frac{\partial P_Y(p(Y))/\partial y}{\partial\theta_Y(p(Y))/\partial y}\cdot Q_Z(p(Y)),$$

其中 $p(Y)=(x(Y),\psi(Y,x(Y)))$ 及 $Z=(P_Z,Q_Z)$. 由此显然有 $dF_X\neq 0$.

最后，引理 1 的情形 a), b) 及 c) 分别对应于图 51 的每一可能情形.



a) $F=0$　　b) $F=0$　　c) $F>0$

图 51

事实上，直接计算可知

$$\frac{\partial}{\partial x}P_Y(x,\psi(Y,x))=\left(\frac{\partial Q_Y(x,\psi(Y,x))}{\partial y}\right)^{-1}\Delta(Y)(x,\psi(X,x)),$$

其中 $\Delta(Y)(x,y)=\mathrm{Det}(DY)(x,y)$.

从而，对于X的逼近场Y，Q_Y为负的，因为$\frac{\partial Q_X}{\partial y}(0,0)=\sigma<0$

这就说明，对于情形b)，当$\frac{\partial}{\partial x}P_Y(x,\psi(Y,x))>0$时，鞍点将在其极小方向$x=x(Y)$上出现.

引理2. 设X为具有鞍结点p的向量场，使得双曲域的分界线γ位于p的结形域内部.

于是存在$\gamma\cup\{p\}$的邻域$V(\gamma)$及X的一个邻域$V(X)$，使得

a) $\partial V(\gamma)=C_1\cup C_2$，其中$C_i$，$i=1,2$，是与$Y\in V(X)$匀断相交的闭曲线；

b) 若$Y\in V(X)$在$V(\gamma)$中没有奇点，则在$V(\gamma)$中有唯一周期轨道$\gamma(Y)$，为双曲的．若是$\operatorname{div}X(p)$为负(或正)，则此周期轨道是Y的通过$V(\gamma)$的每一轨道的$\omega(\alpha)$极限集.

证明. 当$|\theta|\leqslant\varepsilon$甚小时，对于场$R_\theta X$，其$p$处鞍结点双曲扇形的分界线描出一个邻域$V_\theta$．对于$\sigma(X)(p)=\operatorname{div}X(p)<0$的情形，如图51所示．$V_\theta$的边界由两条曲线$C_1(\varepsilon)$，$C_2(\varepsilon)$组成，以$p$点作为一个交点.

引理中的曲线C_1及C_2，可通过p点邻域内位于曲线$C_1(\varepsilon)$，$C_2(\varepsilon)$上的点a,b,c,d的选择，并作出水平联结线，且同时将可能有的角点光滑化后作出来．在图52中，此等线段已用虚线划出.

显然，为作出X使得能与C_1及C_2匀断相交，且指向区域$V(\gamma)$内部，应限制曲线使之包围γ；故在p点可设，$\sigma(X)=\operatorname{div}X<0$.

记四边形$abdc$为Q，$I_+=\overline{cd}$及$I_-=\overline{ab}$为其两侧边．又设X匀断交于I_+及I_-.

取邻域$V_1(X)$，使得

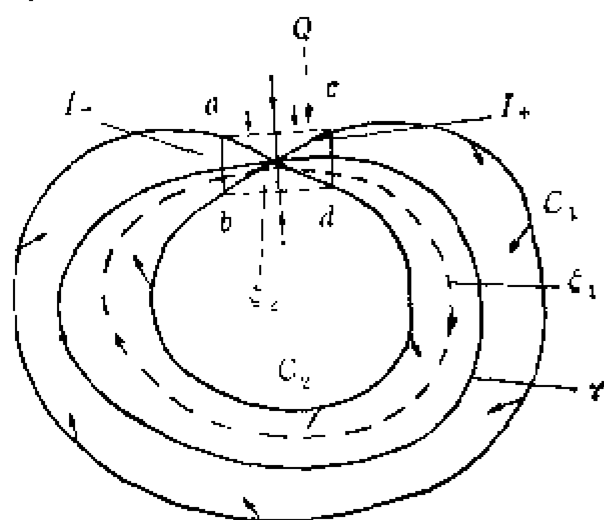


图 52

每一场 $Y\in V_1(X)$ 匀断交于 C_1 和 C_2，以及 I_- 和 I_+，设取 $K=\{\sup[\int_{\xi_1(Y)}\sigma(Y)];Y\in V_1(X)\}$，其中$\xi_1(Y)$是$Y$的起于$I_+$上，终于$I_-$上的轨线弧；今设$K$有限，为此只需取 $V_1(X)$ 为甚小即可．再设Q为甚小，使得在Q上 $\sigma(X)<0$．以 $V_2(X)$ 记X的又一邻域，使 $\inf|\sigma(Y)|>L>0$（inf 在四边形Q上选取），对每一$Y\in V_2(X)$，$\sigma(Y)=\mathrm{div}Y$.

存在X的一个邻域 $V_3(X)$，使得对每一 $Y\in V_3(X)$，有 $T(Y)>K/L$，其中 $T(Y)$ 表示Y的轨线自 I_- 到 I_+ 所经历的时间．显然依连续性，$V_3(X)$ 存在，且 $T(X)=\infty$.

现证，$V(X)=V_1(X)\cap V_2(X)\cap V_3(X)$．满足引理 2 的条件．

事实上，每一 $Y\in V(X)$ 在 $V(\gamma)$ 中没有奇点，且依 Poincaré-Bendixson 定理，有一闭轨 $\xi=\xi(Y)$ 在 $V(\gamma)$ 中；为证明 ξ 是Y的在 $V(X)$ 中的唯一双曲闭轨，只消证明 $\int_\xi\sigma(Y)dt<0$．事实上，

$\int_\xi\sigma(Y)dt=\int_{\xi_1}\sigma(Y)dt+\int_{\xi_2}\sigma(Y)dt$，其中 ξ_2是 ξ 的位于I_-及I_+间的弧，ξ_1 是ξ 的位于 I_+ 及 I_- 间的弧．若设$\int_\xi\sigma(Y)dt\geqslant 0$，则

$$K>\int_\xi\sigma(Y)\geqslant T(Y)(-\sigma(Y)(q))\geqslant T(Y)L,$$

其中 q 是 四 边 形Q中的一点，由此 得出不等式 $T(Y)\leqslant K/L$，而与不等式$T(Y)>K/L$ 相矛盾．

因此在 $V(\gamma)$ 中有唯一吸型双曲周期轨道 $\xi=\gamma(Y)$.

引理3．设X具有一吸型复合 焦 点 p．于 是 存 在 p 的 邻域 $V(p)$，使 $\partial V(p)$ 被X匀断；存在X的邻域$V(X)$及 C^{r-1} 类函数F，$V(X)\to R$，使得当 $Y\in V(X)$时，$dF(Y)\neq 0$，且

a）当且仅当Y在 $V(p)$ 内只有一个吸型复合焦点且又无闭轨线时，$F(Y)=0$；

b）当且仅当Y在 $V(p)$ 内只有一个吸型双曲焦点又无闭轨线时，$F(Y)<0$；

c）当且仅当Y在 $V(p)$ 内只有一个斥型双曲焦点及一条吸引

双曲闭轨时，$F(Y)>0$。

我们不打算给出这个引理的详细证明，请见[S_3]。

函数F可由 $F(Y)=\text{trace}DY(p(Y))$定义之；其中 $p(Y)$是Y在X的奇点 p处邻近的唯一奇点，由隐式

$$Y(p(Y))=0,\ \ p(X)=p$$

确定.

显然F是 C^{r-1} 类函数.

设 $\rho(u,Y)$ 表示由Y的轨道在 $p(Y)$ 处的水平线段上定义的回复映射.

当Y为X的 C^r 近似时，$r\geqslant 4$，引理的情况 a)，b)及 c)分别对应于图 $u\to\rho(u,Y)$的下列图形之一(图 53).

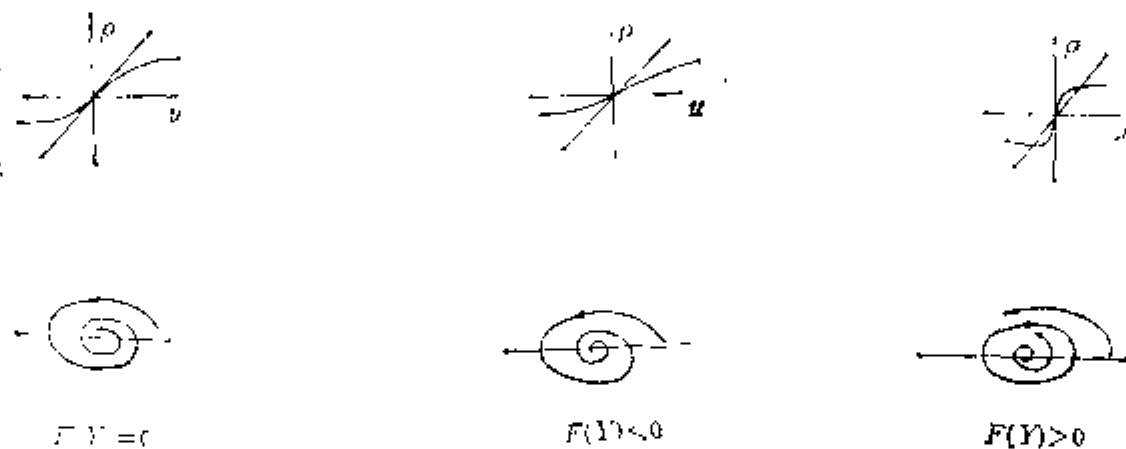


图 53

对于末款所对应的ρ的不动点，有一闭轨线与水平线段相交.

直接计算可知 $dF(Y)\neq 0$。事实上，导数由

$$dF(Y)\cdot Z=\text{div}Z(p(Y))-d(\text{div}Y)[p(Y)]\cdot[DY(p(Y))]^{-1}\cdot Z(p(Y))$$

给出。

引理4. 设 $p\in\partial M$ 是X的一个双曲奇点，$X\in\sum_1^r(1,b,n)$。则存在 p在M中的邻域 $V(p)$，X 在 $\mathscr{X}^r$ 中的邻域$V(X)$，及 C^r 类函数，F：$V(X)\to R$，使得

a) 当且仅当Y在 $V(p)\cap\partial M$ 中有一双曲奇点 $p(Y)$时，$F(Y)=0$、这时 $Y\in\sum_1^r(1,b,n)$，且在 $\partial M\cap(V(p)-\{p\})$ 处匀断 ∂M；

b) 当且仅当Y在 $V(p)\cap\text{Int}M$ 中有一双曲奇点 $p(Y)$，且为

一结点时，$F(Y)<0$. 这时 $Y\in\Sigma^r$，且在 $V(p)\cap\partial M$ 上有唯一抛物内切点 $q(Y)$；

c) 当且仅当 Y 在 $V(p)\cap M$ 中无奇点时，$F(Y)>0$，此时 $Y\in\Sigma^r$. 而在 $V(p)\cap\partial M$ 上有唯一抛物外切点 $q(Y)$.

证明. 定义 $F(Y)=-f(p(Y))$，其中 f 为一 C^r 类函数，依 $\partial M=\{f=0\}$ 隐式地定义之；$p(Y)$ 由 $Y_p(Y)=0$ 及 $p(X)=p$ 定义.

显然 F 为 C^r 类函数，且结论 a)，b) 及 c) 由奇点 $p(Y)$ 的局部性而成立.

今往证结论对于 Y 在 $\partial M\cap V(p)$ 处的切点也成立.

不失一般性，可设 $p=(0,0)$，$X=(P,Q)$，其中

$$P=\alpha x+a(x,y),$$
$$Q=\beta y+b(x,y),$$

而 $\alpha<\beta<0$，且 $a(0,0)=b(0,0)=0$，$da(0,0)=db(0,0)=0$.

为表示 $DX(0,0)$ 的特征空间在 ∂M 处的匀断性条件，应将函数 f 写成

$$f(x,y)=rx+sy+g(x,y),$$

其中 $r>0$，$s<0$，$g(0,0)=0$，$dg(0,0)=0$.

这样，$X\cdot f=P_xf_x+Q_xf_y$ 具有下面表示

$$X\cdot f=r\alpha x+s\beta y+ra+sb+g_xa+g_yb.$$

由此可见，df 及 $d(X\cdot f)$ 在 $(0,0)$ 处为线性无关的. 由此，除以关系 $\alpha/\beta>1$，即可断言 ∂M 及 $X\cdot f=0$ 的相对位置如图 54 所示，其斜率分别与 $y=\frac{r}{-s}x$ 及 $y=\frac{r}{-s}\cdot\frac{\alpha}{\beta}x$ 相同.

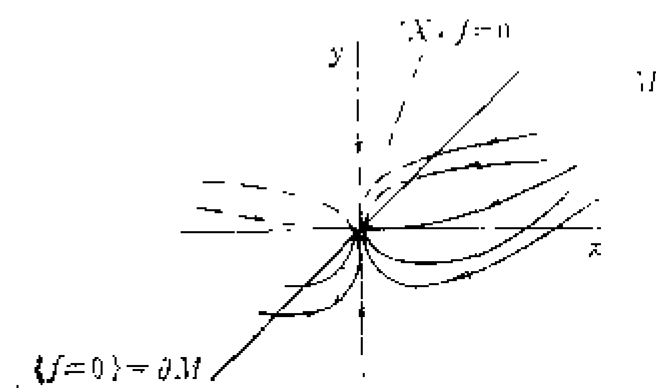


图 54

由于 $d(X\cdot f)\overrightarrow{(0,1)}=r\alpha<0$，可知 $X\cdot f$ 在 ∂M 的位于第一象限的部分上为负，从而 X 指向 M 之外部.

同理，在 ∂M 的位于

第三象限的部分上，X指向M的内域．当$(f, X\cdot f)$为一局部微分同胚时，每一条位于$V(p)$中的轨线有如图54的动态．为证明此点，用一下“爆炸法”(blowing-up)$u=x$，$p=y/x$．

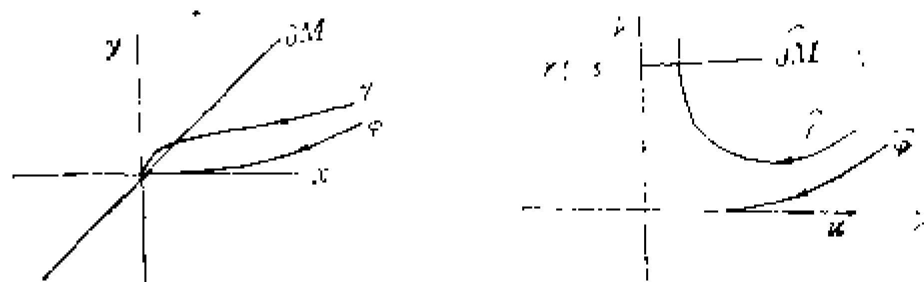


图 55

在坐标(u,p)之下，当$u\neq 0$时，场X可写成

$$X=\left(\alpha u+a(u,up),\ (\beta-\alpha)p+\frac{b(u,up)-pa(u,up)}{u}\right).$$

函数$[b(u,up)-pa(u,up)]/u$，从而场X，在p轴的一个邻域内存在一C^{r-1}类扩张$\bar{X}$．因为分子当$u=0$时为零，场$\bar{X}$在$(0,0)$处得一鞍点，以p轴为不稳定分界线，以u轴为稳定切线；其相图如图55之右图所示．从而在平面(x,y)上存在唯一轨线与x轴(绝对值较大的特征值的特征子空间)相切，称之为“强”轨线．于是$V(p)$中的位于第一象限中的轨线γ，同样也在$\partial M\cap V(p)$上保持“强化”性质，且匀断∂M．为证明$V(p)$中每一条轨线在横标上为强轨线，同时在$\partial M\cap V(p)$上仍保持“强化”性质，且不与y轴相切，我们再用一下“爆炸法”$v=y$，$q=x/y$；结果在$(0,0)$处得到一个吸型结点．由此即可建立图55所示的结果．易见，对于使$F(Y)=0$的Y，结论也成立．

同样也可讨论当$F(Y)\neq 0$时的相图．

显然，当Y近于X时，$Y\cdot f=0$为一C^r逼近$X\cdot f=0$的曲线．以$q(Y)$记此曲线与$\partial M(f=0)$的交点．

依隐式定义的$Y\to q(Y)$为C^r类．

为分析Y在∂M处的切点$q(Y)$的性质，应计算$Y^2\cdot f$．对$Y=X$的情形取

$$X^2\cdot f=r\alpha^2x+s\beta^2y+\cdots,$$

则可知，$f=0$，$X\cdot f=0$ 的相对位置如图 56 所示.

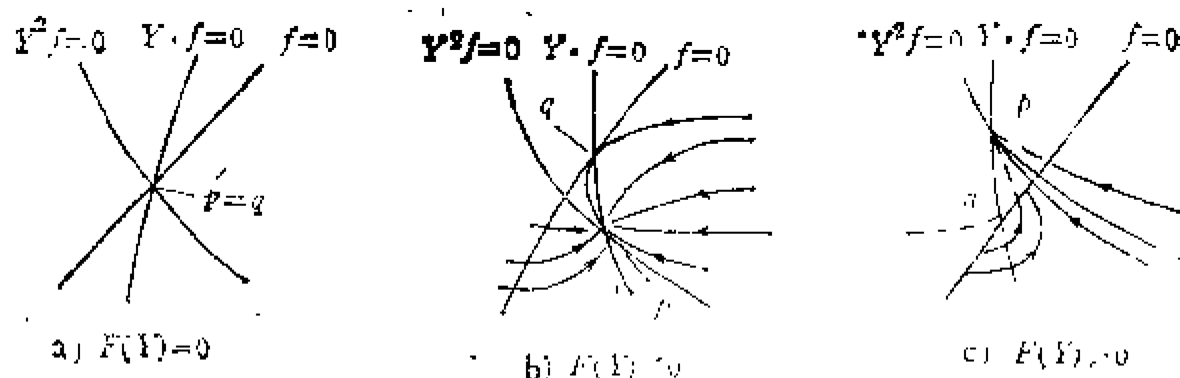


图 56

显然此等相对位置对X的甚小扰动仍得以保持. 由于 $d(X^2\cdot f)(1,0)=ra^2>0$，故当 $F(Y)<0$ 时 Y 的切点为内切，此因 $Y^2\cdot f>0$，这种情况如图 56 b)所示. 同理，当 $F(Y)>0$ 时结论也成立，见图 56 c).

结点正则域的分析，以及对微小扰动的连续依赖性，可用以证明结构稳定性：$Y\in\Sigma'$，当 $F(Y)\neq0$ 时，由此分析可知 $Y\in\Sigma_1^*(1,b,n)$. 若 $F(Y)=0$，则可证明，在后一情形下，Y与X拓扑等价，其结点正则域图形如下. 但另一些轨道应作明显的修正. 见第三章图 28.

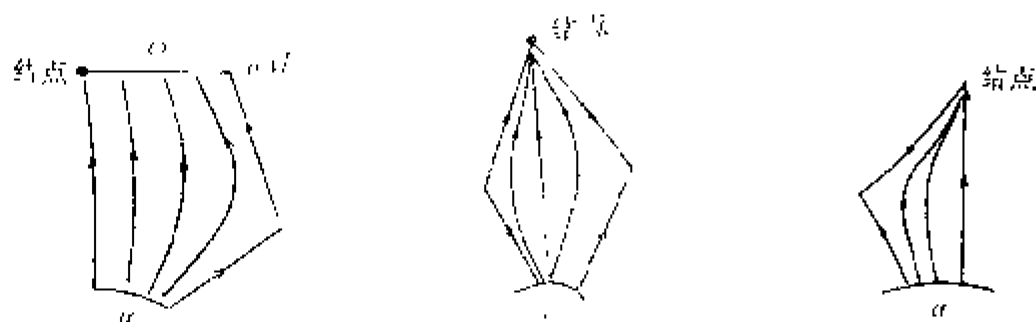


图 57

注意，可以对情形 $\Sigma_1^*(1,b,f)$ 及 $\Sigma_1^*(1,b,s)$，陈述与引理 4 相仿的引理. 请读者连同其证明一起写出. 我们则只限于讨论本书引论所强调的分枝图形.

注意对于 $\Sigma_1^*(1,b)$ 的第三种情形，一个内切点与 $\mathrm{Int}M(\lambda<0)$ 中的双曲奇点当 $\lambda=0$ 时合并；当 $\lambda>0$ 时，奇点在M中消失，且

在 ∂M 上又出现了一个外切点。

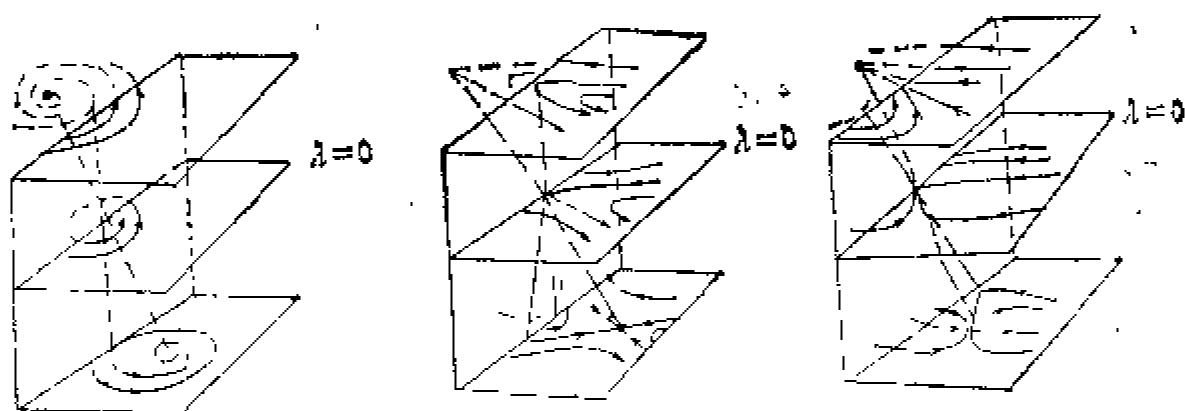


图 58

请读者验证公式

$$dF(Y)(Z)=df(P(Y))\cdot[DY(p(Y))]^{-1}\cdot Z(p(Y)).$$

由此结果立得 $dF(Y)\neq 0$. ▮

命题 3.1.1 的证明.

a 款） 构成拓扑等价的同胚，可用第三章简述过的正则区域方法[S,T]来作出.

对于情形 $\sum_1^r(1,a,f-c)$，不出现结点正则域，其证明可用引理 3 及第三章方法推出. 事实上，设 $X\in\sum_1^r(1,a,f-c)$，则仍依引理 3，它在 $M'=M-V(p)$ 中为结构稳定、而 Y 及 X 间的拓扑等价在 M' 中实现的同胚，即可直接扩张到 $V(p)$，如第三章的情况一样.

对于 $\sum_1^r(1,a,s-n)$ 的情形，结点正则域包含一个鞍结点. $F(Y)=0$ 时，Y 与 X 之间拓扑等价的作法，与第三章所说的情形并无什么本质的不同. 为证明 $F(Y)\neq 0$ 时 $Y\in\sum^r(M)$，需分两种情形加以考虑. 如果双曲扇形域的分界线位于结点域内，则依引理 2，$Y|M-V(\gamma)$ 为结构稳定. 如果 $F(Y)\neq 0$，则 $Y|\overline{V(\gamma)}$ 也结构稳定. 对于 $F(Y)<0$ 的情形，象引理 1 一样讨论，在 $V(\gamma)$ 中既无鞍结点间的联结线，也无 $M-V(\gamma)$ 中的鞍点联结线出现，更无轨线与 ∂M 相切. 因此，依连续性，鞍点分界线仍保持上述性质，且逼近于 X 的结鞍点分界线. 从而，由于第四章定理 2 所述的三个在 M 中满足的条件均得成立，故 $Y\in\sum^r(M)$.

同理可考虑 $F(Y)>0$ 的情形. 此时在 $M-V(\gamma)$ 中的正则域将连续地变为 Y 在 M中的正则域, 且在第三章 2.2 的记号下, $V(\gamma)$变成 $V(\gamma(Y))$. 若是 $F(Y)=0$, 则可象 $X|\overline{V}(\gamma)$在M中一样来扩张 $Y|\overline{V(\gamma)}$ 的拓扑共轭; 为此只要注意, 在 $\partial V(\gamma)$ 中将 $Y|M-V(\gamma)$ 的正则区域的 α 弧及 ω 弧映成 $X|M-V(\gamma)$ 上相应弧即可. 各种相图已精确地绘于图 59 a 中.

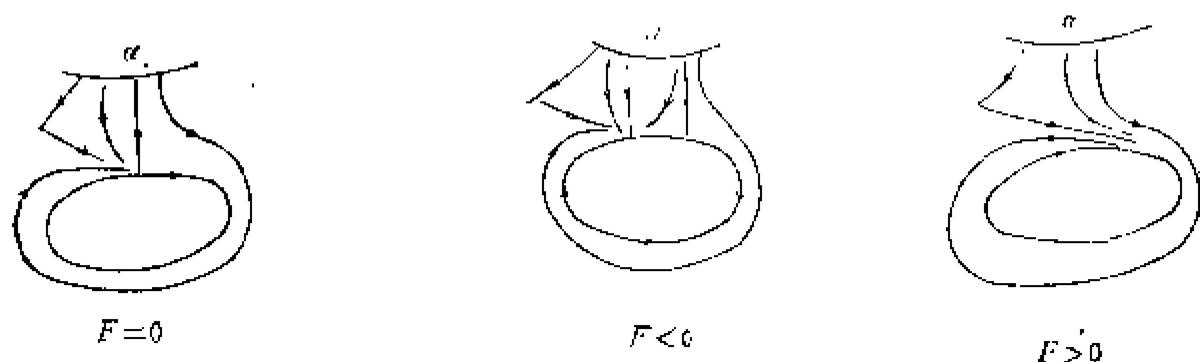


图 59a

对于双曲扇域分界线不含于结点域的情形, 可在第三章2.2节所述证明中附加一个细节; 唯有 3.1.1 的证明中才有此种情形. 跟前面一样主要不同处已精确绘于图 59b 中. 详见[S8].

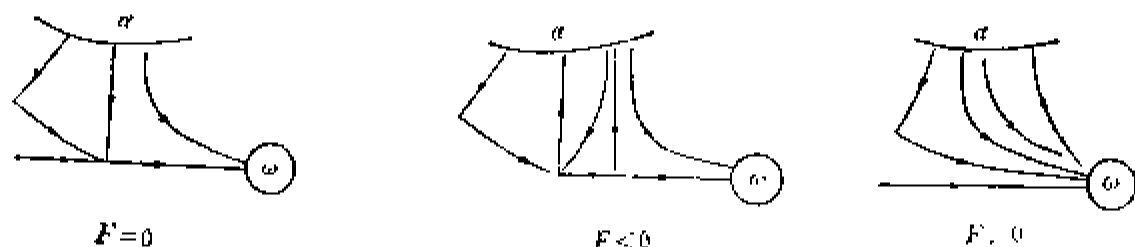


图 59b

对于 $\sum_1^1(1,b,f)$的情形, 只有本征结点正则域出现(图59c). 其它情形, 可由此作适当修正即可, 见第三章图 28, 例如, 此域可由第三章图29.5 情形处理之(图 59c).

对于情形 $\sum_1^1(1,b,s)$, 只出现一个正则区域, 为一本征结点型, 见图 59d. 因此按第三章图29.2 那样处理, 即可得出证明.

b 款) 命题 3.1.1 b款)的证明得分两步:

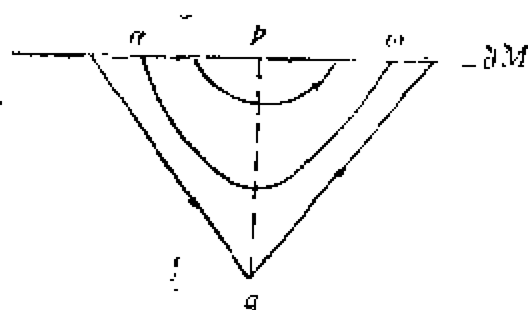


图 59c

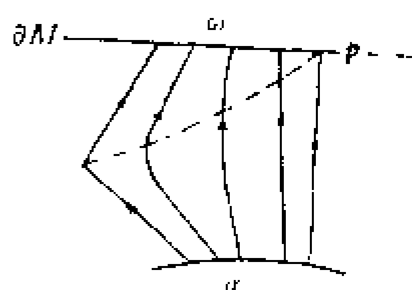


图 59d

a) $\sum_1^r(1,a,s-n)\cup\sum_1^r(1,a,f-c)$在集合$\mathscr{X}_1^r(1,a)$中稠；后者表示在$M$中有一非双曲奇点的场的集合，取内蕴拓扑；

b) $\sum_1^r(1,b,f)\cup\sum_1^r(1,b,s)\cup\sum_1^r(1,b,n)$在集合$\mathscr{X}_1^r(1,b)$中稠，后者表示在$\partial M$中具有一双曲奇点的场的集合，取内蕴拓扑.

对于情形a)，可设$X\in\mathscr{X}_1^r(1,a)$在M中的每一奇点均含于$\mathrm{Int}M$中. 设一奇点为$O\in\mathbb{R}^2$，且非双曲. 为验证此假设，只消考虑路径$X_\mu=X(x+\mu v)$，其中v在X的(∂M上)非双曲点处匀断∂M. 显然，若μ甚小且有适当符号，X_μ在$\mathrm{Int}M$中有一非双曲奇点.

若是非双曲奇点O使$\Delta=\det(D\cdot X)(0)=0$，则可得$DX(0)=\begin{pmatrix}0 & c\\ 0 & b\end{pmatrix}$，其中$c=0$，$b\neq0$，故奇点为$X$的一鞍结点. 对$b=0$的情形，可考虑场的路径$X_\mu=(\mu x^2,\mu y)+X$；对每一甚小而不等于0的$\mu$，均以$O$为鞍结点.

若是非双曲奇点使$\Delta>0$且$\sigma=0$，则可设$DX(0)$具有形式

$$DX(0)=\begin{pmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{pmatrix},a\neq0.$$

可以用$\rho^{(3)}(0)$，[S_2，A]的表达式证明，对于$\mu\neq0$且甚小

$$X+\mu(x(x^2+y^2),\ y(x^2+y^2))$$

以O为一复合焦点.

综合起来，给定$X\in\mathscr{X}_1^r(1,a)$，可作含于$\mathscr{X}_1^r-\sum^r$中的一连续路径，在$\mathscr{X}^r$中为甚小，其端点$X_1=X_{\mu_1}$在$\mathrm{Int}M$中有一奇点，为鞍结型或复合焦点型. 显然，X_1在$\mathscr{X}_1^r$中且为X的逼近.

以下简单说明一下，怎样修正第三章命题2.3，以便作出$\mathscr{X}_1^r$中的另一条甚短路径，以联结含于$\sum_1^r(1,a,s-n)$或$\sum_1^r(1,b,f-c)$中的X_1及X_2.

例如，对情形$X_1\in\mathscr{X}_1^r(1,b)$，此时场有双曲奇点$O\in\partial M$. 可考虑场的族

$$X(u,v;\theta)=R_\theta[X_1+(ux,vy)].$$

可以象第三章2.3一样证明，集合

$$\{(u,v;\theta);X(u,v,\theta)\notin\sum_1^r(1,b)\}$$

在R^3中有Lebesgue零测度. 由此得稠密性. 同理，若$X_1\in\mathscr{X}_1^r(1,a)$在$O\in\mathrm{Int}M$处有一鞍结点，则考虑

$$X(u,v;\theta)=R_\theta[X_1+(x^2+y^2)(u,v)].$$

若奇点是复合焦点，则考虑

$$X(u,v;\theta)=\mathrm{R}_{\theta(x,y)}[X+(x^2+y^2)(u,v)],$$

其中$\theta(x,y)=(x^2+y^2)\cdot\theta$.

c款） 跟a款）及b款）情形一样，证明类似于第三章命题2.6的讨论. 读者可自行写出，由此得出命题3.1.1所证明的结论. ∎

3.1.2 **命题**. 2.2.2中定义的集合$\sum_1^r(2)$，$r\geq2$，具有如下的性质：

a)对于任一$X\in\sum_1^r(2)$，存在$\mathscr{X}^r$中邻域V，C^{r-1}类函数F：$V\to R$，使$F(X)=0$，$dF_X\neq0$，且$F^{-1}(0)=(X,V\cap(\mathscr{X}^r-\sum^r))$（定义2.3）含于$\sum_1^r(2)$中.

此外，$F^{-1}(R_-)\subset\sum^r$，$F^{-1}(R_+)\subset\sum^r\cup(\mathscr{X}^r-\sum^r(4))$（定义2.2）. 且因$F^{-1}(R_+)\cap(\mathscr{X}^r-\sum^r(4))\neq\varnothing$，则有$X\in\hat{\sum}_1^r(2)$（2.4.1），且仅在此情况下：$F^{-1}(R_+)\subset\sum^r$.

每一$Y\in F^{-1}(0)$拓扑等价于X.

b)在取内蕴拓扑时，$\sum_1^r(2)$在$\mathscr{X}_1^r(2)=\mathscr{X}^r-\sum^r(2)$中稠；

c)当且仅当$X\in\sum_1^r(2)$时，场$X\in\mathscr{X}_1^r(2)$关于$\mathscr{X}_1^r$结构稳定.

证明概要. 命题a款)的证明已给于[S_3,T]. 作法类似于3.1.1. 我们限于讨论F的作法及dF的计算.

设 $L=\{g=0\}$. 是 X 在 $p\in\gamma$ 处的一个匀断截线，对近于 X 的 Y，Y 的 Poincaré 映射由

$$\Pi(Y,u)=\varphi(Y,T(u,Y),u)$$

定义，其中 $T(u,Y)$ 由 $g(\varphi(Y,T(u,Y),u))=0$，$u\in L$，隐式地定义；此中 $T(p,X)$ 是周期轨道 γ 的周期，因而 $T(u,Y)$ 为 C^r 类.

a) 对情形 $X\in\sum_1^r(2,a)$，用 L 上的坐标系，定义

$$F(Y)=\pi(Y,u(Y))-u(Y),$$

其中 $u(Y)$ 由 $\pi'(Y,u)=1$ 隐式地定义. 可见 F 为 C^{r-1} 类. 图 60a 中画出 $\pi''(X,0)>0$ 的情形.

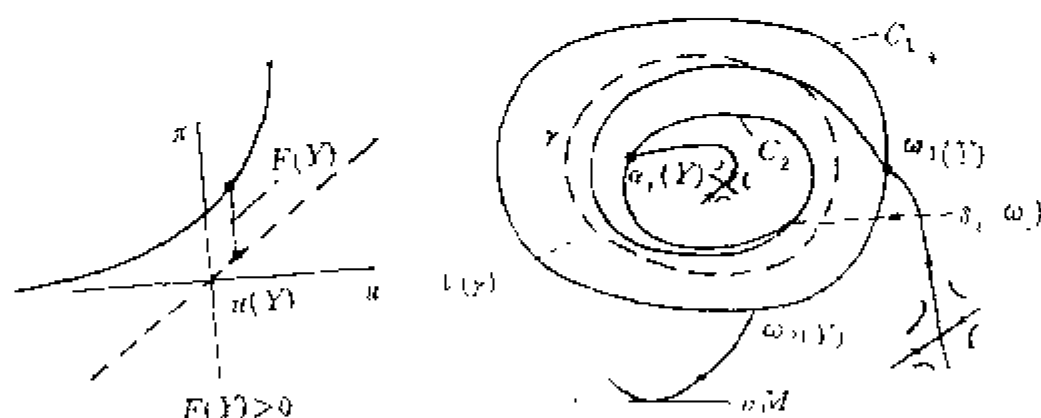


图 60a

显然，若 $F(Y)<0$（或 $=0$）则 $Y\in\sum^r$（或 $\in\sum_1^r(2,a)$）. 取 V 甚小，因为在此情形仅有 X 的非双曲周期轨道的邻域 $V(\gamma)$，使对每一 $Y\in V$，匀断 $\partial V(\gamma)$. 而 Y 恰有两条（或一条）双曲（或半稳定）周期轨道. 边界 $\partial V(\gamma)$ 则由两条曲线 C_1，C_2 组成；$Y\in V$ 在 C_1 上指向 $V(\gamma)$ 内部，在 C_2 上指向外部.

当 $F(Y)>0$ 时，Y 的流定义一个变换 $\delta_Y:C_1\to C_2$，见图 60a，令 $\omega_1(Y)$，$\omega_2(Y)$，…，$\omega_l(Y)$ 表示正则区域中 $Y|M-V(\gamma)$ 的 ω 弧与 C_1 相遇的端点. 类似地，设

$$\alpha_1(Y),\alpha_2(Y),\cdots,\alpha_k(Y),$$

表示 C_2 上相应的端点. 显然，这些点 ω_i，α_j，有鞍点分界线及切于 ∂M 的轨道通过，可参看图 49. 用 2.4.5 的记号写成

$$X\in\sum_1^r(2,a,k\alpha,l\omega).$$

显然，当且仅当对每一对 i，j，$\delta_Y(\omega_i(Y))\neq\alpha_j(Y)$ 时，$Y\in\sum^r$. 因此

无需考虑 $X_1^* \in (2, a\Sigma)$ 的情形，即 $k \cdot l = 0$ 的情形．若 $k \cdot l > 0$，则必有场 Y_1，使 $F(Y)$ 任意小，且对每一 i_1，j_1，$\delta_r(\omega_{i_1}(Y_1)) = \alpha_{j_1}(Y_1)$．由此可知 $V(\gamma)$ 中 Y 的一条轨线与 $L \cap V(\gamma)$ 相遇次数 v 趋于 ∞ $(v \to \infty)$，当 $F(Y) \to 0$．

今补用一个较好的符号 $\Sigma_i^*(4,d)$ 来表示满足 $\Sigma_1^*(4,a,d)$，$\Sigma_1(4,b)$ 及 $\Sigma_1^*(4,c)$ 的所有性质的场的集合，但除去一条，允许 n_1 条不同鞍点的联结线，n_2 条切于 ∂M 恰为二点的轨道，以及 n_3 条切于 ∂M 恰一次的鞍点分界线，并且满足 $n = n_1 + n_2 + n_3$．

由此可知

$$F^{-1}(R_+) \subset \Sigma^r \cup \left[\bigcup_{i=1}^{m} \Sigma_i^*(4,d) \right],$$

其中 $m = \min\{l, k\}$．

例如，若 $m = 1$，则得 $F^{-1}(R_+) \subset \Sigma^r \subset \Sigma_1^*$．

a′）若 $m \geqslant 2$，则当 V 甚小时，并不能明显地看出 $F^{-1}(R_+)$ 含于 $\Sigma_i^*(4,d)$ 中．在 3.2.2 中曾给出一个由 2.4.6 所定义的 $F_1^*(2, a)$，使 $F_1^*(2,a)$ 恰好成为 $\Sigma_1^*(2,a,k\alpha,l\omega)$ 的在 $\mathscr{X}_1^*$ 中 $\Sigma_i^*(4,d)$ 的闭子集．为得出命题在 a 款）$X \in \Sigma_1^*(2,a)$ 情形的证明，还须证明 $dF_X \neq 0$．这是证明引理时用过的，对情形 $X \in \Sigma_1^*(2,b)$ 的一个事实的推论．而拓扑等价的作法与第三章的作法相仿．

b）现在对情形 $X \in \Sigma_1^*(2,b)$，我们以曲线 $\Gamma = \{X \cdot f = 0\}$ 作为匀断截线．定义 $F(Y) = -f(p(Y))$，其中 $p(Y)$ 以 $(Y \cdot f)(p(Y)) = 0$，$p(Y) = \varphi(Y, T(p(Y), Y), p(Y))$ 定义，而 $T(u, Y)$ 依 $(Y \cdot f)(\varphi(Y, T(u,Y), u)) = 0$ 隐式地定义．

显然，F 为 C^{r-1} 类，因为 f 为 C^r 类．

b′）为确定计，设 γ 是 X 的一条吸型周期轨道，它在 $p = p(x)$ 处切于 ∂M．

设 $V(\gamma)$ 为 γ 的一个邻域，使 $\partial V(\gamma) = C_1 \cup C_2$，其中 C_1，C_2 是闭曲线，使对每一逼近于 X 的 Y，均指向 $V(\gamma)$ 的内域，见图 60b′．

类似 a 款），以 $\omega_i = \omega_i(Y)$，$i = 1, \cdots, k$，记这样的类，其时鞍

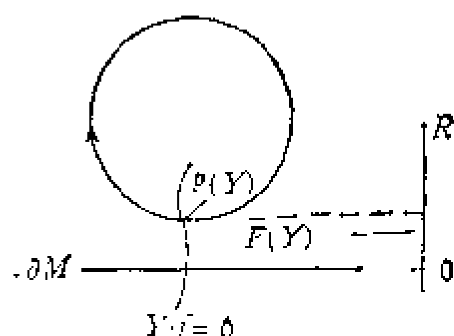


图 60b

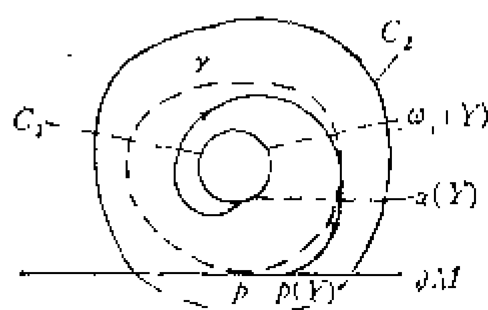


图 60b'

点分界线及切于 ∂M 的轨线交于 C_1.

当 $F(Y)>0$ 时, Y 的负轨线 $\delta(Y)$ 在切点 $p(Y)$ 处只截 C_1 于唯一点 $\alpha(Y)$. 这样,当且仅当对每一 $i=1,\cdots,k$, 当 $\alpha(Y)\neq\omega_i(Y)$ 时, $Y\in\Sigma^r$. 相反情形, $Y\in\Sigma_1^r(4,b)\cup\Sigma_1^r(4,c)$. 当 $k=0$ 时, 即 $X\in\Sigma_1^r(a,b)$ 时, 存在场 Y, 使 $F(Y)$ 任意小且 $Y\in\Sigma_1^r(4,b)\cup\Sigma_1^r(4,c)$. 由此推出: $\delta(Y)$ 交于线段 $L\cap V(\gamma)$ 的次数, 当 $F(Y)\to 0$ 时趋于∞.

显然 $Y\in\Sigma^r$ 相应于 $F(Y)<0$. 至于 $F(Y)=0$ 时的 Y 及 X 之间的拓扑等价的作法, 则是正则区域方法的常规应用. 注意此时只出现一个基本结点域, 见图 60c. 图 60d 则画出了情形 b) 的分枝点.

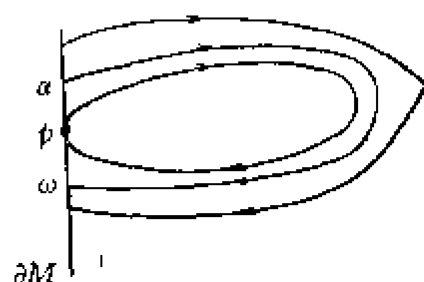


图 60c

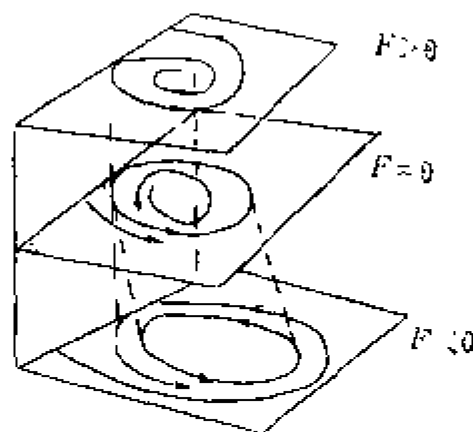


图 60d

为了给出 3.1.2 的证明, 尚缺少的是 dF 的计算问题. 下述引理就来做这件事.

引理 1. 设 $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ 是向量场 $Y=(Y_1,Y_2)$ 的一积分曲线, 即方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1'}{dt} = Y_1(x_1, x_2), \\
\dfrac{dx_2'}{dt} = Y_2(x_1, x_2)
\end{cases}
\tag{1}
$$

之一解.

令 $Z=(Z_1, Z_2)$ 是 R^2 中的向量场，则知 $\gamma(t)$ 的法分量

$$
\eta(t) = \frac{-v_1(t)Y_2(\gamma(t)) + v_2(t)Y_1(\gamma(t))}{|Y(\gamma(t))|},
$$

其中 $(v_1(t), v_2(t))$ 是线性系统

$$
\begin{cases}
v_1' = \dfrac{\partial Y_1}{\partial x_1}(\gamma(t))v_1 + \dfrac{\partial Y_1}{\partial x_2}(\gamma(t))v_2 + Z_1(\gamma(t)), \\
v_2' = \dfrac{\partial Y_2}{\partial x_2}(\gamma(t))v_1 + \dfrac{\partial Y_2}{\partial x_2}(\gamma(t))v_2 + Z_2(\gamma(t))
\end{cases}
\tag{2}
$$

的解，$\eta(t)$ 满足微分方程

$$
\eta' = (\sigma(Y) - \frac{|Y|'}{|Y|}(\gamma(t)))\eta + \frac{\det(Y, Z)}{|Y|}(\gamma(t)),
\tag{3}
$$

其中

$$
Y = Y(\gamma(t)), |Y|(\gamma(t)) = Y_1^2(\gamma(t)) + Y_2^2(\gamma(t))^{1/2},
$$

$|Y|'(t) = \dfrac{d}{dt}|Y|(\gamma(t))$，且 $\det(Y, Z) = Y_1Z_2 - Y_2Z_1$.

但线性微分方程(3)的满足初始条件 $\eta(0)=\eta_0$ 的解是

$$
\eta(t) = \frac{|Y(0)|}{|Y(t)|}\exp\left(\int_0^t \sigma(Y)d\tau\right)\left[\eta_0 + \int_0^t \exp\left(-\int_0^\tau \sigma(Y)du\right) \cdot \frac{\det(Y, Z)}{|Y(0)|}d\tau\right].
\tag{4}
$$

证明. 对 $\eta=\eta(t)$ 的表达式(4)直接求导得到. ∎

注 1. 由表达式(4)可得出结论：Poincaré 映射的导数可由 $\pi'(0) = \exp\int_0^T \sigma(Y)dt$ 给出，见第一章§5. 为此只要取 $Z=0$，$\eta_0=1$ 即可.

注 2. 还可断言，若 $\pi(0,\lambda)$：$L\to L$ 是与一个场 $X_0 = X(x, \lambda_0)$ 的周期轨道 γ_0 相关的 Poincaré 变换，其中 X 为一个依赖于

单实参数λ的场的族，故可知，如 L 是 γ_0 的法线，则

$$\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}(u_0,\lambda_0)=\frac{\frac{\partial\pi}{\partial u}(u_0,\lambda_0)}{|X(u_0,\lambda_0)|}\int^{T}\exp\left(-\int_0^t\sigma(X)(\gamma_0(u))du\right)$$

$$\det(X\cdot(\gamma_0(t),\lambda_0)\frac{\partial X}{\partial\lambda}(\gamma_0(t),\lambda_0))dt. \qquad (5)$$

为要验证，只消取 $\eta_0=0$ 及 $Z(\cdot)=\frac{\partial X}{\partial\lambda}(\cdot,\lambda_0)$ 即可；这样方程(2)将与给出单参关系的流的导数方程相一致，见第一章定理1.1．(5)由(4)推出，取 $\frac{\partial\pi}{\partial u}=\pi'$ 即可．

引理2．设匀断线段 L 是半稳定轨道 γ 的法线：$L=\{p+v\}$，$v=X^{\perp}(p)/|X(p)|$．

则在坐标 s 下，a)中定义的 F 为

$$F(Y)=\langle v,\pi(Y,u(Y))-u(Y)\rangle,$$

且其导数为：

$$dF(X)Z=|X(p)|^{-1}\int_0^T\exp\left(-\int_0^t\sigma(X)du\right)\det(X,Z)dt, \quad \text{a)}$$

其中 $T(p,X)=T$ 是 γ 的周期，且函数 $\sigma(X)$，$\det(X,Z)$ 的积分沿 $\gamma(t)$ 计算．

证明．求导即得：

$$\begin{aligned}dF(Y)\cdot Z&=\langle v,D_1\pi(Y,u(Y))\cdot Z+D_2\pi(Y,u(Y))Du(Y)\\&\quad\cdot Z-Du(Y)\cdot Z\rangle\\&=\langle v,D_1\pi(Y,u(Y))\cdot Z+(D_2\pi(Y,u(Y))-1)\\&\quad\cdot Du(Y)\cdot Z\rangle\\&=\langle v,D_1\pi(Y,u(Y))\cdot Z\rangle.\end{aligned}$$

对场的族 $X(x,\lambda)=X+\lambda Z$ 用一下注(2)的式(5)得 $\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}(p,0)$ $=\langle v,D_1\pi(X,u(X))Z\rangle$．由此，从 γ 为非双曲性推出式a)．▌

引理3．对情形b)，$F(Y)=-f(p(Y))$ 的导数表达式为：

$$dF_Y(Z) = -\frac{\pi'(p(Y),Y)|\nabla f(p(Y))|}{|Y(p(Y))|}\cdot S_Y(Z)$$

其中，$S_Y(Z) = \int_0^{T(Y)} \exp - \int_0^t \sigma(Y)du \det(Y,Z)dt$，

又 $T(Y) = T(p(Y),Y)$ 是Y的周期轨道的周期，积分沿轨道计算.

证明. 我们记得 $(Y\cdot f)(p(Y)) = 0$，
$(Y\cdot f)(\varphi(Y,T(p(Y),Y),p(Y))) = 0$ 及 $\varphi(Y,T(p(Y),Y),p(Y)) = p(Y)$. 对上述式子求导数，得到

$$D_1\varphi(Y,T(p(Y),Y),p(Y))\cdot Z + D_2\varphi(Y,T(p(Y),Y),p(Y))\cdot[DT(p(Y),Y),\ Z] + D_3\varphi(Y,T(p(Y),Y),p(Y))Dp(Y)\cdot Z = Dp(Y)\cdot Z.$$

由此得：

$$[1-\pi'(p(Y),Y)]\cdot Dp(Y)\cdot Z = D_1\varphi(Y,T(p(Y),Y),p(Y))\cdot Z + Y(p(Y))\cdot[DT\cdot Z].$$

对 $F(Y) = -f(p(Y))$ 求导得

$$DF(Y)\cdot Z = -df(p(Y))\cdot Dp(Y)\cdot Z,$$

于是由

$$df(p(Y))\cdot Y(p(Y)) = (Y\cdot f)(p(Y)) = 0,$$

给出

$$DF(Y)\cdot Z = -[1-\pi'(p(Y),Y)]^{-1}df(p(Y))\cdot D_1\varphi(Y,T(p(Y),Y,p(Y)))\cdot Z.$$

依引理 1 的式(4)，可断定 $D_1\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)\cdot Z$在$Y$ 过$p(Y)$点的法向投影由下式给出

$$\eta(T(p(Y),Y))\cdot\frac{Y^{\perp}(p(Y))}{|Y(p(Y))|}.$$

又因 $df(p(Y))\cdot(Y^{\perp}(p(Y))) = \langle\nabla f(p(Y)),\ Y^{\perp}(p(Y))\rangle$，得

$$DF(Y)\cdot Z = -\pi'(p(Y),Y)\cdot\frac{(1-\pi'(p(Y),Y))^{-1}}{|Y(p(Y))|^2}\cdot\langle\nabla f(p(Y)),\ Y^{-1}(p(Y))\rangle\cdot S_Y(Z).$$

$$S_Y(Z) = \int_0^{T(Y)} \exp\left(-\int_0^t \sigma(Y)du\right)\det(Y,Z)dt.$$

于是在 $p(Y)$ 处因 $\langle\nabla f, Y^{\perp}\rangle = |\nabla f|\cdot|Y|$，即得出式 (b)．

由表达式 a) 及 b)，对于 $dF\neq 0$ 的情况是显然的．由此得到命题 3.2) a 款）证明的主要步骤．

对 b款）及 c款）还需作某些修正，然后再用第三章的方法，重复命题 3.1 的证明即可．▮

3.1.3　**命题**．2.2 中定义的集合 $\Sigma_1^r(3)$，$r\geqslant 3$，具有下列性质

a）对每一 $X\in\Sigma_1^r(3)$，存在 $\mathscr{X}^r$ 中的邻域 V 及 C^{r-1} 类函数 F：$V\to R$，使 $F(X)=0$，$dF_X\neq 0$；又 $F^{-1}(0)=V\cap(\mathscr{X}^r-\Sigma^r)$ 含于 $\Sigma_1^r(3)$ 中．

此外，$F^{-1}(R-\{0\})\subset\Sigma^r$，
又每一 $Y\in F^{-1}(0)$ 拓扑等价于 X．

b）取内蕴拓扑时，$\Sigma_1^r(3)$ 在 $\mathscr{X}_1^r(2)=\mathscr{X}^r-\Sigma^r(3)$ 中稠；

c）当且仅当 $X\in\mathscr{X}_1^r(3)$ 时，$X\in\Sigma_1^r(3)$ 关于 $\mathscr{X}^r$ 结构稳定．

此命题的证明可在[T]中找到．函数 F 的定义如下：

$$F(Y)=(Y^2\cdot f)(p(Y)),$$

其中 $p(Y)$ 由 $(Y\cdot f)(p)=0$，$f(p)=0$ 隐式地定义．此情形的分枝图形如图 61 所示．

两个抛物切点，一内切，一外切 ($F<0$)，在 $F=0$ 时合并成为一个三次切点，$F>0$ 时切点消失．

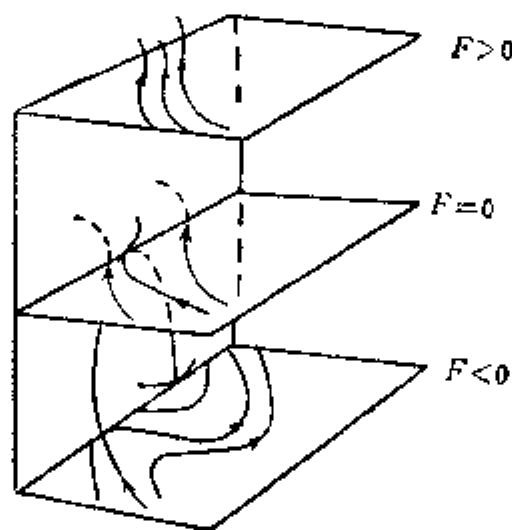


图　61

3.1.4　**命题**．2.2.2 中定义的集合 $\Sigma_1^r(4)$，$r\geqslant 2$，具有以下性质：

a）对每一 $X\in\Sigma_1^r(4)$ 存在 $\mathscr{X}^r$ 中邻域 V，C^{r-1} 类函数 F：$V\to R$，使 $F(X)=0$，$dFX\neq 0$，且 $F^{-1}(0)=C(X, V\cap(\quad{}^r-\Sigma^r))$ 含于 $\Sigma_1^r(3)$ 中．

此外，$F^{-1}(R_-)\subset\Sigma^r$ 及 $F^{-1}(R_+)\subset\Sigma^r\cup(\mathscr{X}^r-\Sigma^r(4))$（定义

2.2)，由于 $F^{-1}(R_+)\cap(\mathfrak{X}^r-\Sigma^r(4))\neq\varnothing$，而有 $X\in\Sigma^r(4)$ (2.4.1)，且仅在此情况下，$F^{-1}(R_+)\subset\Sigma^r$.

每一 $Y\in F^{-1}(0)$ 与 X 拓扑等价.

b) 取内蕴拓扑，$\Sigma_1^r(4)$ 在 $\mathfrak{X}_1^r(4)=\mathfrak{X}^r-\Sigma^r(4)$ 中稠；

c) 当且仅当点 $X\in\Sigma_1^r(4)$ 时，场 $X\in\mathfrak{X}_1^r(4)$ 关于 $\mathfrak{X}_1^r$ 结构稳定.

证明. 下面一系列引理的证明，旨在排除掉使 $X\in\Sigma_1^r(4)$ 不为结构稳定的那些轨线. ▌

引理1. 设 X 为一具一鞍点 p 的场，I 是其分界线 γ 在 q 点的法线段.

于是存在分界弧 $\widehat{pq}$ 的邻域 $V(X)$，使得对每一 $Y\in V(X)$，Y 具有一个鞍点 $p(Y)$ 作为 V 中唯一奇点，又具有唯一一条过 $p(Y)$ 的分界线，与线段 I 交于点 $q(Y)$，且使弧 $\widehat{p(Y)q(Y)}$ 含于 V 中；函数 q: $V(X)\to I$ 为 C^r 类，且：

$$dq(X)\cdot Z=-\frac{1}{|X(q)|}\int_0^\infty\exp\left(-\int_0^t\sigma(X)\,dt\right)\det(X,Z)\,dt. \quad (1)$$

证明. 为确定计可设 γ 以 p 为 ω 极限集. 考虑一个坐标系. 令 V 是 $\widehat{pq}$ 的一个邻域，使 p 为 X 在 V 中的唯一奇点，且作为 p 的异于 γ 的分界线，匀断 ∂V. 见图 62.

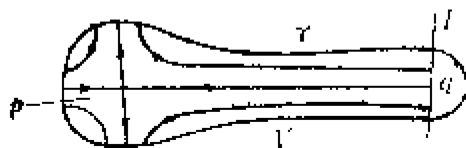


图 62

显然 q 仅在 X 的邻域 $V(X)$ 中定义，且为连续的，而分界线(或更一般的，不变流形)的存在性及唯一性的证明，即可用隐函数定理得出[P-M]. 由此知 $Y\to q(Y)$ 为 C^r 类.

公式(1)已在[S₂]中证明.

设 p 为 α 极限点，则得

$$dq(X)Z=-\frac{1}{|X(q)|}\int_0^{-\infty}\exp\left(-\int_0^t\sigma(X)\,du\right)\det(X,Z)\,dt. \quad (2) ▌$$

引理2．设场X具有一条联结鞍点$\overrightarrow{p_1, p_2}$的分界线$\gamma$．则存在弧$p_1p_2$的邻域$V$及$X$的邻域$V(X)$，及$C^r$函数$F: V(X)\to R$，使$df(Y)\neq 0$，对每一$Y\in V(X)$；且

a) 当且仅当Y有唯一一条联结鞍点$p_1(Y)$，$p_2(Y)$的分界线$\gamma(Y)$使$\overrightarrow{p_1(Y), p_2(Y)}$含于$V$中时，$F(Y)=0$；

b) 当且仅当Y在V中没有鞍点连结线时，$F(Y)\neq 0$．

证明．设I是γ在点q处的法线段，V_i是$\widehat{p_iq}$的邻域，$V_i(X)$，$i=1,2$，是X的与鞍点p_i相应的邻域（依引理1）．定义$V=V_1\cup V_2$，以及$V(X)=V_1(X)\cap V_2(X)$．

以$p_i(Y)$记$Y\in V(X)$的唯一鞍点，含于V_i中，又$q_i(Y)$是$p_i(Y)$的鞍点分界线与线段I的交点，则从引理1的a款）易知，由

$$F(Y)=q_1(Y)-q_2(Y)$$

定义的F: $V(X)\to I$满足引理条件．依引理1的公式1及公式2，即得

$$dF(X)\cdot Z=-\frac{1}{|X(q)|}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\int_0^t\sigma(X)du\right)\det(X,Z)dt. ■$$

引理3．设X为一向量场，有轨道γ在$p\in\partial M$处有一抛物内切点．令I为γ在q处的法线段，则存在轨道弧$\widehat{p,q}$的邻域V，X的邻域$V(X)$，使得对每一$Y\in V(X)$，Y具有唯一抛物内切点$p(Y)$，且此轨道与线段I的交点$q(Y)$，使弧$\widehat{p(Y)q(Y)}$含于V中，见图63．

函数q: $V(X)\to I$为C^r类，且对$Y\in V(X)$，

$$dq(X)\cdot Z=\frac{1}{|X(q)|}\int_0^T\exp\left(-\int_0^t\sigma(X)du\right)\det(X,Z)\,dt,$$

其中T是弧$\widehat{pq}$所对应的时间．

证明．我们记得，点$p(Y)$由$f(p(Y))=0$，$(Y\cdot f)(p(Y))=0$，$p(X)=p$定义．取$v=X^{\perp}(q)/|X(q)|$，且依$\langle v^{\perp}, \varphi(Y,T(Y),p(Y))-q\rangle=0$，$T(X)=T$，定义$T(Y)$作为使$\varphi(X,T(X),p(X))=q\in I$的极小时间．再定义

$$q(Y)=\langle v,\varphi(Y,T(Y),p(Y))-q\rangle.$$

则得

$$\begin{aligned}dq(X)\cdot Z&=\langle v,D_1\varphi(X,T,p)\cdot Z+D_2\varphi(X,T,p)DT(Y)\cdot Z\\&\quad+D_3\varphi(X,T,p)Dp(X)\cdot Z\rangle\\&=\langle v,D_1\varphi(X,T,p)\cdot Z+D_3\varphi(X,T,p)Dp(X)\cdot Z\rangle\\&=\langle v,D_1\varphi(X,T,p)\cdot Z\rangle\\&=\frac{1}{|X(q)|}\int_0^{T(X)}\exp\left(-\int_0^t\sigma(X)du\right)\det(X,Z)dt.\blacksquare\end{aligned}$$

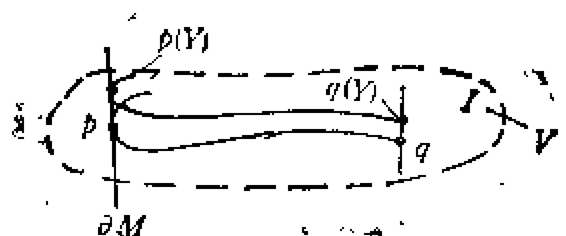


图 63

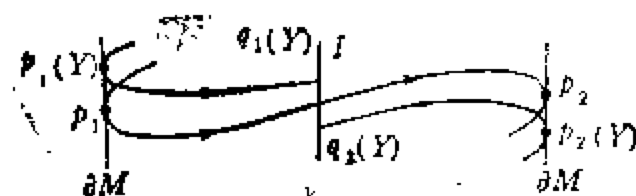


图 64

引理4. 设场X为C^r类，具有一轨线γ，它在∂M上有两个抛物内切点p_1,p_2，且开弧$\widehat{p_1p_2}$含于$\operatorname{Int}M$中.

于是存在弧$\widehat{p_1p_2}$的邻域，X的邻域$V(X)$及C^{r-1}类函数F，$V(X)\to R$，使$F(X)=0$，$dF_X\neq0$，并且当且仅当Y有一条轨线，在∂M上具有两个抛物内切点$p_1(Y)$，$p_2(Y)$，又弧$\widehat{p_1(Y)p_2(Y)}$含于V中时，$F(Y)=0$，见图 64.

证明. 类似于引理 2. 对弧$\widehat{p_1q}$及$\widehat{p_2q}$应用引理 3. 则若

$$F(Y)=\langle v,q_1(Y)-q_2(Y)\rangle,$$

则有

$$dF(X)\cdot Z=\frac{1}{|X(q)|}\int_0^T\exp\left(-\int_0^t\sigma(X)du\right)\det(X,Z)dt,$$

其中$T>0$是γ的弧$\widehat{p_1p_2}$的历时. ∎

引理5. 设γ是场$X\in\mathscr{X}^r$的鞍点$p_1\in\operatorname{Int}M$的分界线，在$\partial M$上以$p_2$为抛物切点.

设q是γ上一点，I是γ在q上的法线. 则令$F(Y)=q_2(Y)-q_1(Y)$，其中$q_1(Y)$依引理 1 定义，$q_2(Y)$依引理 3 定义，即有：

当且仅当Y有一鞍点$p_1(Y)$的分界线，它在$p_2(Y)$处切于∂M，且使弧$\overrightarrow{p_1(Y),p_2(Y)}$含于$\widehat{p_1p_2}$之一邻域内时，$F(Y)=0$. 见图65. F的导数由下式给出

$$dF(X)\cdot Z=\frac{1}{|X(q)|}\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t \sigma(X)du\right)\det(X,Z)dt,$$

其中积分沿$\gamma(t)=\varphi(X,t,p_2)$而取.

引理6. 设$X\in\Sigma_1^r(4,a,l)$(定义2.2.6)为一以p点为顶的奇闭轨γ，设γ为吸型$(\sigma(X)(p)<0)$.

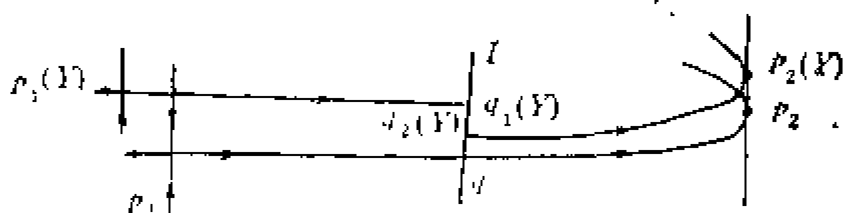


图 65

则存在$\gamma\cup\{p\}$的邻域V，X在$\mathscr{X}^r$中的邻域$V(X)$，以及一个C^r类函数F: $V(X)\to R$，使$F(X)=0$，$dF(X)\neq 0$，$\partial V=C_1\cup C_2$，C_1为每一$Y\in V(X)$所匀断，见图66.

并且：

a) 当且仅当Y有唯一奇闭轨$\gamma(Y)\cup\{p(Y)\}$，以Y在V中唯一鞍点$p(Y)$为顶时，$F(Y)=0$. 此奇闭轨为Y的每一过C_1的轨道的ω极限集.

这时Y与X为拓扑等价.

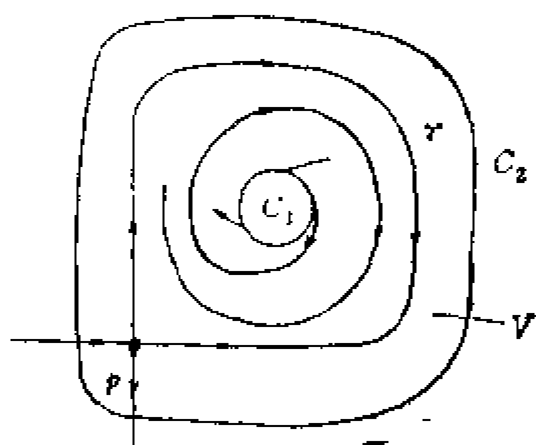


图 66

b) 当且仅当Y有唯一双曲周期轨道$\gamma(Y)$，且它成为Y的每一过C_1的轨道以及$p(Y)$的不稳定分界线的ω极限集时，$F(Y)<0$，见图67，此时$Y\in\Sigma^r$；

c) 当且仅当Y在V中既无周期轨，又无奇闭轨时，$F(Y)>0$，此时$p(Y)$的稳定分界线之一与C_1交得一点$a(Y)$. 见图67.

又 $$F^{-1}(R_+)\subset\Sigma^r\cup\Sigma_1^r(4,a,d)\cup\Sigma_1^r(4,c).$$

此外，当且仅当 $X\in\Sigma_1^r(4,a,l)$ 时，$F^{-1}(R_+)\subset\Sigma^r$.

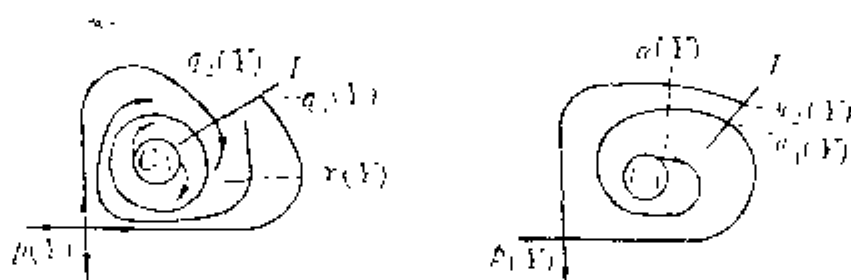


图 67

证明. 函数 $F=q_2-q_1$ 如引理 2 给出，但取 $p_1=p_2=p$. 选 I 的一个定向，使每一不等式成立. 这时，依图 67 所给情形，正向系指向奇闭轨的外部.

曲线 C_1 可由周期轨道经一甚小的旋转（图上为负向）得到.

情形 b) 中周期轨道的唯一性，及情形 a) 中周期轨道的消失，可用命题 3.1 的引理 2 的同样办法，沿 Y 在 V 中的轨道弧上估计 $\int_c \sigma$ 即可证明.

今以 $\omega_1(Y)$, $\omega_2(Y)$, …, $\omega_k(Y)$ 记鞍点分界线及与 ∂M 相切的轨道与 C_1 的交点.

在情形 c) 中，$F(Y)>0$，且当且仅当对每一 $i=1, 2, \cdots, k$, $a(Y)\neq\omega_i(Y)$ 时，$Y\in\Sigma^r$. 否则 $Y\in\Sigma_1^r(4,a,d)\cup\Sigma_1^r(4,c)$.

第一种情形对每一 $Y\in F^{-1}(R_+)$，当 $k=0$，亦即当 $X\in\Sigma_1^r(4,a,l)$ 时出现.

实现 $F(Y)=0$ 的 Y 与 X 之间拓扑等价的同胚的构造，可用弧的相余部分比的办法来完成. 由过 C_1 的奇闭轨所界的域，可如第三章周期轨道的情形处理之. 详情见[S₈]. ▌

注. 读者应注意情形 $\Sigma_1^r(4,a,l)$ 及 $\Sigma_1^r(2,b)$ 之间的类似性. 事实上，当两切点重合时，前者即可视为 $\Sigma_1^r(4,b)$ 的特殊情形.

引理 6 实际上是由命题 3.1.4 的 a款)，就情形 $X\in\Sigma_1^r(4,a,l)$ 而证明的. 第三章的另一些引理及方法可用来处理其它情形，即情形 $\Sigma_1^r(4,a,d)$, $\Sigma_1^r(4,b)$, $\Sigma_1^r(4,c)$.

命题的 b 款)及 c 款)留给读者证明.

定理 1 的证明. 由命题 3.1.1 及 3.1.4 得出.

定理 2 的证明. 由定理 1 即得. 至于 Σ_1^r 在 $\mathscr{X}_1^r$ 中的稠密性, 可用命题 3.1.2 及 3.1.4 的证明推出. 在此情形又应注意, 对每一 $X\in\Sigma_1^r$, 使 $F(Y)>0$ 的场 $Y\in\Sigma_1^r$ 与 X 任意逼近.

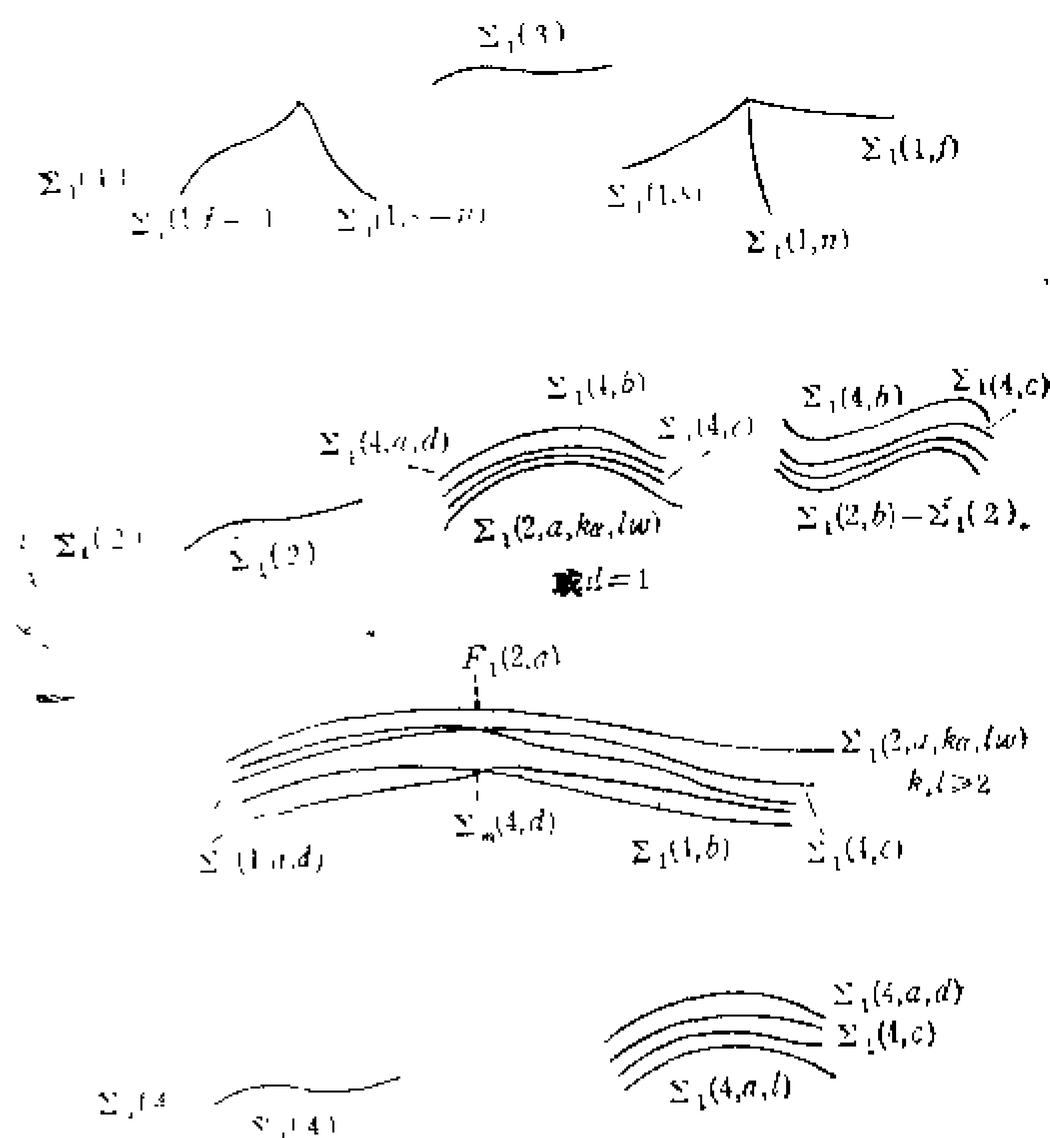


图 68

图 68 中,就 $F>0$ 的情形,画出了 Σ_1^r 的不同连通分支之间的相互影响的种种情形,这可以从 3.1 节的讨论看出来.

3.2 定理 3 的证明.

本节给出定理 3 证明的一些思想.

3.2.1 一般分枝图形.

弧的点及端点表示 $\mathscr{X}^r-(\mathrm{Int}\Sigma_1^r\cup\Sigma^r)$。分支部分表示 Σ^r.

此图把 Σ_1^r 的分支与 $\mathscr{X}_1^r$ 的另一些分支——已在 3.1 节中指出各种类型——以有效密切方式画出.

3.2.2 定理3证明概要.

首先研究 $F_2^r(2,a)$ 的情形.

令 F 是 3.1.2 中定义的函数，$F^{-1}(0)\times R\xrightarrow{\Theta}\mathscr{X}^r$ 以 $\Theta(Y,\theta)=R_\theta Y=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}Y$ 定义之. 显然依 3.1.2 中 dF 的公式，可知 Θ 是一局部微分同胚. 这等于说，$\Sigma_1^r(2)$ 的每一邻近场均可由 $\Sigma_1^r(2)$ 的某一场旋转得到.

此结论对 $\theta\leqslant 0$ 且甚小的情形也都成立，而 $R_\theta X$ 的周期轨的并集由平面环域表示. 应当特别注意场 $X\in\Sigma_1^r(2,a)$ 的稳定轨道的出现. 每一场 $R_\theta X$, $\theta>0$, 在取常数角 θ 时，得到一族曲线 $C(\theta)$. 在这些曲线上设置一个内在坐标 $v=\text{const}$，同时沿曲线 $C(\theta)$ 取坐标 u，使得曲线 $\{u=\text{const}\}$ 成为曲线 $C(\theta)$ 的正交曲线（图 69）.

作为 $R_\theta X$ 的常数角 θ 的曲线 $v=\text{const}$, $u=\text{const}$，易知对每一甚小 $\theta>0$，$R_\theta X$ 的轨道将满足某一形为

$$\frac{du}{dv}=A(v),\quad A(v)>0$$

的方程. 这样，对 $R_\theta X(\theta>0)$ 的两条轨道，差值 $u_1(v)-u_2(v)$ 就 v 而言为常数. 因此，在坐标 u 下，每一弧在曲线 $C(\theta)$ 覆盖的区域中将保持自己的过渡位置.

由此可知，在 3.1.2 证明的 a 款）的记号之下，使 $X\in F_1^r(2,a)$

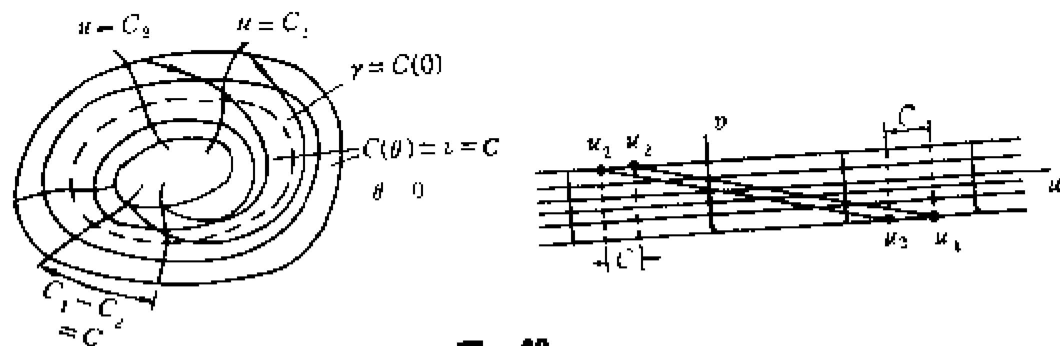


图 69

的条件，将等价于条件

$$
(+)\begin{cases} \text{点 } \omega_i(X) \text{ 的坐标间的每一差值 } u(\omega_i(X)) - u(\omega_j(X)), \\ \text{与点 } \alpha_{i'}(X) \text{ 的坐标 } u \text{ 间每一差值 } u(\alpha_{i'}(X)) - u(\alpha_{j'}(X)) \\ \text{恒不相同.} \end{cases}
$$

此处点 $\alpha(\cdot)$ 及 $\omega(\cdot)$ 即为鞍点分界线以及相切分界线与 γ 的一个小邻域——由 $C(\theta)$ $(0<\theta\leqslant\theta_0$ 甚小) 所覆盖——的边界的交点.

现在从曲线 $C(\theta)$ 及其由坐标 u 定义的，只依赖于 X 的正交曲线，即可看出，所说的条件(+)即为 $F_1^r(2,a)$ 的一个定量刻划.

显然，$F_1^r(2,a)$ 在 $\Sigma_1^r(2,a)$ 中为闭. 从而，依条件(+)可知 $\Sigma_1^r(2,a)$ 内域为空的.

也很显然，这一分析以及在3.1.2的证明中关于集合 $\mathrm{Int}\Sigma_1^r$ 的讨论，正好就是 $\Sigma_1^r - F_1^r(2,a)$. 此即证得定理3的第一部分. 定理3的第二部分的证明，从技巧上看甚为复杂，其基本思想在于验证，对每一 $\Sigma_1^r - \boldsymbol{\Sigma}_1^r$ 的情形，Σ_1^r 的密接于 $\Sigma_1^r - \boldsymbol{\Sigma}_1^r$ 的部分——其分枝图形已如3.2.1——的切平面，当 $F(Y)\to 0$, $F(Y)>0$ 时，趋于 $\Sigma_1^r - \boldsymbol{\Sigma}_1^r$ 的切平面. 这时，3.1中研究的 F 及 dF 的表达式，是个关键性的工具.

3.3 定理4的证明.

1) 匀断 Σ_1^r 的族 ξ 的集合 S_a^r 的稠密性，已证于[S_3, T].

2) 由此同时证明，使 $\xi[a,b]\subset\Sigma^r\cup\Sigma_1^r$ 的族 ξ 的 S_a^r 的子集 $S_{a,b}^r$ 也为稠的. 根据 $F_1^r(2,a)$ 在 $\Sigma_1^r(2,a)$ 中为闭且内域为空之事实即知，S_a^r 的使 $\xi([a,b])\subset\Sigma^r\cup(\Sigma_1^r - F_1^r(2,a))$ 的族 ξ 的集合 S^r 也为稠的.

3) S^r 的开集性质，可由定理3中薄壳结构出现的匀断条件的开集性质推出.

4) 族 $\xi\in S^r$ 的结构稳定性，从 $\xi^{-1}(\Sigma_1^r - \boldsymbol{\Sigma}_1^r)$ 的邻域的余集——它由有限个点 $a_1(\xi), a_2(\xi), \cdots, a_k(\xi)$ 组成——直接推出来.

依薄壳结构，可设每一在 ξ 的邻域 $\vartheta(\xi)$ 中的 ξ 在 $V(\xi)$ 中匀断 Σ_1^r.

这样，取含于$\vartheta(\xi)$中的一个单参族$\eta_s=\xi+(\eta-\xi)s$，余下怎样作2.4.4中定义的沿初始曲线$(s,\lambda(s))$，$0\leqslant s\leqslant 1$——它们依$\eta_s^{-1}(\Sigma_1^r)$定义之，且使两者间的区间对应于$\eta_s^{-1}(\Sigma^r)$的区间，见图70——的同胚μ_s：$[a,b]\to[a,b]$，也就很清楚了.同样显然的是，依定理1，沿此曲线上的每一向量场均拓扑等价.

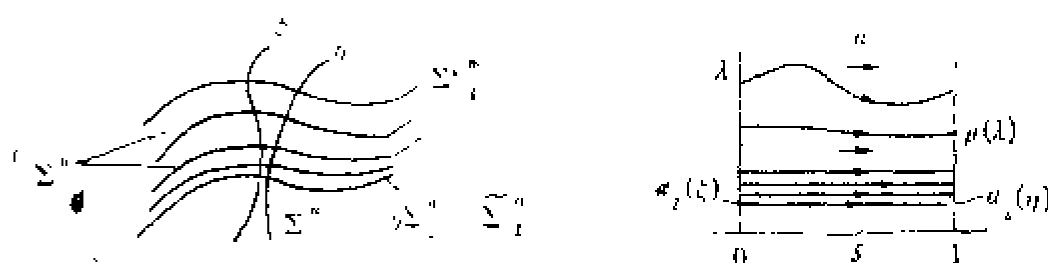


图 70

5）族ξ的结构稳定特征，可以从S^r的稠密性，并结合第四章2.6的方法推出来，这种匹配法，已经多次实践.

参 考 文 献

[A] Andronov A., Leontovich E., et al., Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane. I. P. S. T., Jerusalem, 1971.

[P-M] Palis J., Melo W., Introdução aos Sistemas Dinâmicos. Projeto Euclides, CNPq. 1978.

[S₁] Sotomayor J., Estabilidade Estrutural de Primeira ordem e Variedades de Banach, Tese de Doutoramento, IMPA, 1964.

[S₂] Sotomayor J., Generic one parameter families of vector fields on two dimensional manifolds, Publ. Math. I. H. E. S., Vol. 43, 1974.

[T] Teixeira M., Generic bifurcation on manifolds with boundary. J. D. E., Vol. 25, 1, 1977.

附　　录

实平面与复平面上微分方程的奇点与极限环[1)]

Ю.С. 伊里雅申科(Ильященко)

引　　言

在近十年中，微分方程定性理论的一些实质性问题有了很大变化，使一些本世纪初便已完成的经典工作，在最近一个时期里重又受到挑战．举个例子，Bendixson 的论文[34]（准确地说，是第二部分）便是如此．该文第一章包含著名的 Poincaré-Bendixson 定理．其余五章涉及平面向量场的奇性分解．第一章早在 1941 年就已译成俄文，其余内容最近才被译出．但关于奇性分解的 Bendixson 定理则不久前才获得改进[47,49]．Dulac 的论文[38a]也遭到同样命运．几个月以前，在Dulac的最著名的有限性定理的证明里，发现一个漏洞．但另一方面，Dulac 理论的发展又为复合奇点的中心焦点区分问题，提供一条捷径．所有这些，以及相近问题，组成本文首章内容．

第二章将讨论奇点的正则形理论．如 Dulac[38a]指出的，这个理论与极限环理论关系密切．在本章中我们并不拘泥于维数的限制，认为它具有任意维数或许更方便．А.Д.Брюно 在发展了解析向量场的正则形理论以后，断言：将向量场化成正则流形的形式级数，在共振情况下，常为发散的．В.И.Арнольд 又提出一个我们今后将予以验证的建议，即将此种发散性称之为"标准情

1） 本文根据1982年2月作者演讲稿预印本译出．——译者注

形". Брюно 的理论说明，首先，解析分类似乎过于"精细"；其次，该理论并未涉及解析分类的不变性（此种不变性与形式分类的不变性不一样）。但最近一段时间，解析向量场的全纯不变性理论已取得长足的进展，例如见[41，44，45，17]。另一方面，在向量场光滑分类的研究中，也已取得很大的成就[12，35]。

第一章　实　平　面

§1.　奇 性 分 解

平面向量场退化奇点的研究，绝大多数是借助于奇性分解的各种变形方法. Briot-Bouquet[88]首先将奇性分解用于微分方程.

约定. 今后如无例外，凡遇光滑向量场、函数、映射以及微分同胚，均指具有无穷次可微性.

1.1　**σ 过程**. 这是奇性分解法的一个代数变形，它对任意维空间中的光滑、实解析及全纯向量场均可施行. 此处考虑实解析的平面情形，详见[7].

考虑有孔平面 $\mathbb{R}^2-\{0\}$ 在射影直线 $\mathbb{RP}^1$ 上的自然映射：将每一点 $x\neq0$，映成过 x 及 0 的直线，此映射之图记为 M；则它在直积 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{RP}^1$, 中的闭包 $\bar{M}$，是个二维解析流形，且微分同胚于 Möbius 带，就第二因子的投射 π 将 $\bar{M}$ 映入 $\mathbb{R}^2$，零点的原像仍为射影直线 $\mathbb{RP}^1$，而投射 π：$M\to\mathbb{R}^2-\{0\}$ 为一解析微分同胚.

引理. 一个在平面 $\mathbb{R}^2$ 的原点邻域中给定的解析向量场，对应于一个在射影直线 $\mathbb{RP}^1$(在 Möbius 带中)的邻域内定义的解析方向场 L. 除去分布在 $\mathbb{RP}^1$ 的一个奇点有限集(可能为空)外，场 L 处处有定义. 场 L 在投射 π：$M\to\mathbb{R}^2-\{0\}$ 之下，变为生成场 V 的方向场. 在场 L 的每一奇点邻域内，生成某一个解析向量场.

将平面 $\mathbb{R}^2$ 变为流形 $\bar{M}$，同时又将场 V 变为场 L 的代换，便称为 σ 过程，或者叫做奇性膨胀. 在 σ 过程下，奇点一般说来已较原有的为简单. 引理最后一个结论告诉我们，可用归纳法继续施行 σ 过程. 自然需提出问题：一个向量场的奇点，在经有限个 σ 过程后所能变成的最简单奇点是什么？

对于平面上解析和光滑情形，可用芽（germ）的概念加以陈述.

1.2 解析向量场的奇性分解.

定义. 平面向量场的奇点称之为初等的，若是场在此点的线性部分的系数矩阵至少有一个非零特征根.

奇点的“初等性”有两重含义：第一，如下面定理证明的，非初等奇点可以象原子一样“分裂”成初等奇点；第二，初等奇点结构简单：将场在一适当的卡（chart）上写出，则在奇点邻域内方[illegible]出. 非初等奇点有时称为复合奇点.

定义. 设全纯方向场 L 在奇点 0 的邻域内被一向量场 V 给出. 若 0 是场 V 的初等奇点，则 0 也称为是场 L 的初等奇点.

Bendixson 定理[34]. 实平面上具有孤立奇点的解析向量场，经过有限个 σ 过程后，可变为一个只有初等奇点的解析方向场.

这里，我们以近代方式陈述此定理，但其实质并无变化.

对复解析情形，类似定理已被 Seidenberg 证明[47].

1.3 光滑情形. 稍早些时候，F. Dumortier 作出了一类平面光滑向量场[39, 40]，对此场类似结果也成立.

定义. 以原点为奇点的向量场 V 称为满足 Løjasiewicz 条件，如果当 $x \to 0$ 时 $|V(x)|$ 的减小不快于向径长的某次幂.

注. 实平面或复平面上具有孤立奇点的解析向量场，在奇点处常满足Løjasiewicz 条件.

定理[39]. 设平面光滑向量场 V 满足 Løjasiewicz 条件，则经有限个 σ 过程后，场 V 将变成一个在奇点的膨胀邻域内定义的方向场 L，使得：

（1）场 L 的一切奇点均为初等的；

（2）场 L 的奇点集，由有限个孤立点以及有限个位于粘合射影直线上的线段组成；

（3）在每一孤立奇点的邻域内，场 L 可以由一个满足 Løjasiewicz 条件的向量场给出.

本定理所描述的膨胀，Dumortier 称之为良性膨胀.

定义．以原点为奇点的向量场，在原点处具有确定切线的相曲线，称为特征轨线．

定理[39]．设场V满足前一定理条件，此外，在原点处有特征轨线，则场在原点处具有相当整齐的有限阶拓扑结构．

这表示，场V在原点的某一邻域内的完全研究，可以限于其Taylor级数的甚高阶有限段来进行．

§2．平面上初等奇点的光滑轨道分类

2.1 **定义**．在零点邻域中定义的光滑向量场V称为与解析向量场W形式轨道等价，若是场V的形式Taylor级数可以用下面两种运算化为场W的形式Taylor级数：变量的形式代换以及乘以自由项不为零的形式级数．

注．与常用定义不同，此处允许"时间变号"，即可以乘以一个具有负自由项的形式级数．

定义．两向量场称为光滑轨道等价，若是其中一个的相曲线可用微分同胚变为另一个的相曲线．

2.2 Р.И.Богданов**定理**（解析情形），平面解析向量场在其初等奇点的某一邻域内，与自身的形式轨道正则形（正则形定义见2.3）为光滑轨道等价．

此定理曾被Богданов视为一个猜测[16]．证明的基本部分已包括在工作[12]中；证明的陈述和完成已录于本文作者已发表的论文《Dulac的论文"论极限环"及中心焦点区分问题》内．

Богданов**定理**（光滑情形）．初等奇点处满足Løjasiewicz条件的光滑向量场，在此点的某一邻域内与自身的形式轨道正则形为光滑轨道等价，只要它不属于下述例外集N：场属于N类，若是它与其出现中心的线性部分为形式轨道等价．

此定理的证明已部分包含在[12,35]以及作者前面征引的论文中．找一个Богданов定理直接和初等的证明将是有意义的．作者的证明并不简单，而且用到相当多的代数技巧．

对于类N中的场，Богданов 定理不再成立；例如下面“超慢焦点”之例所示：$\bar{x}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$，$r^2=x^2+y^2$，$V(\bar{x})=I\bar{x}+e^{-r/2}\bar{x}$，其中 I 是 90° 的旋转.

2.3 光滑向量场的形式轨道正则形. 如上述定理中提到的，已辑于下面表中[12]（k, m 及 n 为自然数，c 为实数，$\bar{x}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$）.

奇点类型	正则形	
1.具有非共振线性部分$\Lambda\bar{x}$	$W(x)=\Lambda x$	(1)
2.线性部分出现中心$(V\in N)$	$W(\bar{x})=Ix\pm(r^{2k}+cr^{4k})x$	(2)
3.共振结点	$W(x,y)=x\dfrac{\partial}{\partial x}+(ny+\varepsilon x^n)\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\varepsilon\in\{0;1;-1\}$	(3)
4.具有特征数关系$\lambda=-\dfrac{m}{n}$的共振鞍点	$W(x,y)=x\dfrac{\partial}{\partial x}+\varepsilon x(u^k+cu^{2k})\dfrac{\partial}{\partial x}+y\lambda\dfrac{\partial}{\partial y}$, $u=x^my^n$，为共振幂$\varepsilon\in\{0;1;-1\}$	(4)
5.满足Łojasiewicz条件的退化初等奇点	$W(x,y)=x(\pm x^n+cx^{2n})\dfrac{\partial}{\partial x}-y\dfrac{\partial}{\partial y}$	(5)

注. 式(4)与[12]中的式(1.6)稍有不同，且已利用了 Chaperon 的工作，这是下面一般定理的特例.

Chaperon 定理[37]. 若是两个具有双曲奇点的光滑向量场形式等价，则它们在此点某邻域内为光滑等价（不依赖相空间的维数！）.

注. 上文所辑的正则形均为完全可积.

本节结果对于下文陈述 Dulac 定理的证明，是十分重要的.

§ 3. 平面多项式向量场极限环个数的有限性问题

本节讨论 Dulac 的论文[38*]. 该文中证明的一个基本结果是有关解析向量场复合环单一变换的一般形式定理. 由 Dulac 的基

本结果可推知下面的定理。

定理. 右端为多项式的微分方程组在实平面上仅有有限个极限环.

此定理的证明中已被发现一个至今未能弥补的漏洞. 为陈述论文的基本结果,并说明怎样产生漏洞,我们给出一些定义.

3.1 **定义.**

A.复合环.

定义. 所谓向量场的复合环,是指此场的有限个奇点及非常值轨线的并集,并且:

奇点集非空;

当 $t\to\pm\infty$ 时,非常值轨线趋于奇点;

复合环连通,且自身或其真子集不得收缩为一点.

注. 复合环可由单个奇点组成,此时称为退化复合环;通常在复合奇点进行奇性分解时,将遇到复合环.(见图1.)

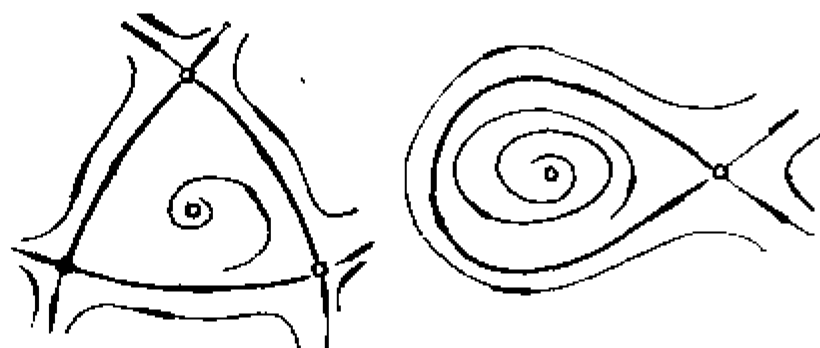


图1 复合环之例,图上粗线表示复合环,其余为相轨线.

B.复合环的单一变换.

从直观上说,复合环的单一变换可以象闭相曲线一样定义,只消代替匀断而取半匀断;即考虑顶点在环上的半区间的同胚像;精确定义陈述如下.

定义[1] 所谓向量场V的复合环γ的半匀断,是指一个C^∞映射Γ: $[0,1)\to\mathbb{R}^2$,具有下列性质:

曲线$\Gamma(0,1)$光滑,不自交,且与场不切;

映射Γ在$\mathbb{R}$中0的邻域中可被无限光滑地延拓,且在零点有

1) 在行文中,映射Γ及其像$\Gamma[0,1)$,作者都不加区分地称为半匀断. ——译者注

有限阶非零的jet。

半匀断的可取卡，或是指函数 Γ^{-1}，或是指任一函数 $f\cdot\Gamma^{-1}$，其中 f 是半区间[0,1)的微分同胚，它在零点邻域中可以微分同胚地延拓。

注．半匀断未必能延拓成一条以 $\Gamma(0)$ 为内点的光滑曲线．以下常将半匀断连同其上的可取卡一起考虑；半匀断的映射被认为与半区间[0,1)的映射恒同．

设 γ 是场 V 的复合环，Γ 及 $\Gamma^+\subset\Gamma$ 是以 p 为顶的 γ 上半匀断．设对环 γ 的任一邻域 U 及任一甚近于 p 的点 $q\in\Gamma^+$，场 V 的以点 $\varphi(0)=q$ 为起点的正半轨 φ_q，在严格正时间处与半匀断 Γ 相交．以 $\Delta_\gamma(q)$ 记半轨线 $\varphi_q-\{q\}$ 与半匀断的第一个交点，此外，设初始点 q 及终点 $\Delta_\gamma(q)$ 的半轨线弧整含于邻域 U 内．

这时，映射

$$\Delta_\gamma:\ (\Gamma^+,p)\to(\Gamma,p),q\to\Delta_\gamma(q)$$

的芽便称为环 γ 的**单一变换**．此外，对于由公式 $q\to\Delta_\gamma(q)$ 导出的 Δ_γ 的任一表示，也用同样记号及称呼．

注1．与 γ 为闭相轨线的情形不同，复合环的单一变换对于半匀断的选择是重要的，为强调此种依赖性，有时记 Δ_γ 为 Δ_{γ,Γ^+}．

注2．光滑向量场复合环的单一变换在半匀断的每一内点处为微分同胚，但甚至不一定能在顶点的邻域内 C^1 光滑地延拓．这不光因为半匀断可能有的奇性，还由于单一变换本身的性质．此种变换常属于 Dulac 所引进的"半正则映射类"．

一旦选择了可取卡，即可使半匀断与半区间 [0,1) 恒同．设 $\mathbb{R}^+$ 为非负实半轴，于是如同 $(\mathbb{R},0)$ 一样可以定义映射 $(\mathbb{R}^+,0)\to(\mathbb{R}^+0)$ 的芽与jet，只需把零点的邻域取为半区间（而非区间）即可．

定义．映射 f：$(\mathbb{R}^+,0)\to(\mathbb{R}^+,0)$ 的芽称为是**半正则的**，如果对任一甚大自然数 N，映射 f 的第 N 个jet$f^{[N]}$ 具有下面形状的表示

$$x \mapsto cx^{\nu_0} + \sum_1^k x^{\nu_j} p_j(\ln x),$$

$$c \neq 0, 0 < \nu_0 < \cdots < \nu_k \leqslant N,$$

其中p_j是多项式.

$f^{(N)}$ 的这个展式的第一项 ($N \geqslant \nu_0$) 称为 f 的芽的主项.

半正则芽的表示称为半正则的映射.

称映射 $(\mathbb{R}^+,0) \to (\mathbb{R}^+,0)$ 的芽为平凡芽,如果它在零点处的所有单侧导数等于零.

注. 容易证明,若 g_1 及 g_2 是具有正导数的微分同胚$(\mathbb{R},0) \to (\mathbb{R},0)$ 的两个芽,而 h 是个半正则芽,则合成 $g_1 \circ h \circ g_2$ 也是半正则芽. 这就允许讨论半匀断的半正则映射(常连同可取卡的类一起考虑).

3.2 Dulac 定理及推广.

Dulac 定理. 解析向量场复合环的单一变换在适当选取半匀断后,或为半正则的,或为平凡的,或为平凡芽的逆.

Dulac 定理的推广. 对于无限光滑的,在一切奇点处均满足 Løjasiewicz 不等式的向量场,上述定理仍成立.

3.3 有限性问题.

Dulac 的论文以如下款式组成;在引理和前三部分中,证明了上面所说的 Dulac 定理,再由下面的讨论推出平面多项式向量场极限环个数的有限性.

平面多项式向量场V可以标准方式对应于球面上的一个解析向量场 V_*, 说得具体一些是,场 V_* 在球心到切平面的投射下给出与原始向量场V 一致的方向场.

几何引理. 设解析向量场在闭二维流形上有一个相异极限环的叙列,则存在此叙列的一个子列,向闭相轨线或复合环(注意,复合环可以退化成一个点)结聚.

前一种可能性可以不计,事实上,解析向量场的闭相曲线对应的单一变换为可逆全纯映射,故不可能有可数个孤立不动点向定义域的内点结聚. 对于后一种可能性,Dulac 则根据上述定理和

下面引理加以消除.

引理. 半正则自映射 f: $(\mathbb{R}^+,0)\to(\mathbb{R}^+,0)$ 的芽,或为恒等映射,或以原点为孤立不动点.

此引理在〔38a〕的 23 节中,以如下讨论给以证明.

f 的芽的不动点来自方程 $f(x)=x$. 若是 f 的芽的主项不是恒等映射,则此方程有孤立解,即零解. 若是芽的主项为恒等映射,则映射 f 本身不为恒等映射,故方程 $f(x)=x$ 等价于方程

$$x^{\nu_1}P_1(\ln x)+O(x^{\nu'_1})=0,$$

其中 P_1 是非零多项式. 此方程以原点为孤立零点;事实上,除此方程以 x^{ν_1}, 即得一个在原点甚小邻域内无解的新方程. 这是因为,新方程右端第一项当 $x\to 0$ 时有非零(可能是无限的)极限. 但第二项趋于零. 由此即算完成证明.

这一段讨论的错误之处是,对于一个以 x 为主项的半正则非恒等映射,方程 $f(x)=x$ 可能不等价于后一个具非零 P_1 的方程;如下面反例所示,此引理不真.

映射 f: $x\mapsto x+e^{-1/x}\sin\frac{1}{x}$ 为半正则, 但有可数个结聚于原点的不动点.

3.4 **问题.**

1. 平面$\mathbb{R}^2$上多项式向量场是否仅有有限个极限环?

2. 解析向量场是否存在复合环,其单一变换为可逆全纯映射(甚或恒等映射)附加一个非零尾部?

此问题与上述反例密切相关. 即使对于非退化鞍点的分界线环,答案也不清楚. 第二章的材料可望对解决此问题有所帮助.

3. 无特征轨线的平面解析向量场的奇点是否恒为中心或焦点? 换句话说,是否可能有极限环的可数集结聚于解析向量场的奇点?

据我所知,此问题仅对具有非退化线性部分的向量场以及最简退化情形的向量场才有解.下面这个有限性问题,似已与 Dulac 论文不怎样密切了.

4. **猜测**(〔43〕).对每一 n 存在 N, 使右端为 n 次多项式的平

面方程不可能有一重数超过 N 的极限环.

§4. 中心与焦点的区分问题

第一部分. 复合奇点

4.1 采用复合环理论的观点.

对于平面向量场,不存在特征轨线的奇点称之为中心-焦点;此术语尚未普及. 但据我所知,对于不存在特征轨线的奇点,至今尚无适当称呼.

据已知定理([30]),中心-焦点某一邻域内的任何相曲线,或为环,或为螺线. 因此,中心-焦点型奇点可视为允许有一单一变换的退化复合环. 设 V 是向量场在中心焦点型奇点处的芽;以 $\Delta(V)$ 记相应的单一变换. 则求解中心与焦点的区分问题,也就是指出变换 $\Delta(V)$ 的渐近性的一种算法. [38a,16,12] 的结果可用来拟定此种算法,这点已陈述于作者的文章(见2.2)的第 6 节.

在详细讨论第一焦点量的计算时,首先应当弄清楚一些重要概念和结果.

4.2 用 Newton 图研究复合奇点.

定义. 将向量幂 $ax^k e_1$ 及 $bx^k e_2$(其中 e_1 及 e_2 是 $\mathbb{R}^2$ 上的基向量, $k\in\mathbb{Z}^2_+$, $x=(x_1,x_2)$) 分别与 $\mathbb{Z}^2$ 上的格点 $k+e_1$ 及 $k+e_2$ 相对应.

以原点为奇点的解析向量场 V 的所谓承载子,是指 $\mathbb{Z}^2$ 上一个格点集. 此集之点对应于 V 的 Taylor 展式中非零系数的幂.

场 V 的 Newton 图,记为 $\Gamma(V)$,依下法组成:考虑 V 的承载子的凸包,在由直线段组成的边界上取所有这样的部分,其内法线方向严格指向第一象限. 由此即作得图 $\Gamma(V)$.

我们说一个 Γ 非退化场满足某一性质,若是具有 Newton 图 Γ 的一切不满足此性质的向量场的集合,可用有限个以 Taylor 展式的系数组成的代数方程式区别出来.

例子. 当且仅当 Newton 图 Γ 在每一对直线 $k_1=0, k_2=1$;

$k_1=1, k_2=0$ 上至少有一个点时，Γ非退化向量场有孤立奇点（原点）.

向量场 V 的 Taylor 展式中所有属于 Newton 图 Γ(V) 的点所对应的幂，叫做 V 的主项.

定理（[9]）. 设Γ是以原点为孤立奇点的平面向量场的 Newton 图. 在以 Γ 为 Newton 图的所有解析向量场的空间中，存在一个Γ非退化向量场的开稠集 U，它可以用有限个仅涉及场的主项的代数不等式区分出来，并具下面性质：域 U 分成两部分，ZF 及 S；主项在 ZF 中的向量场以原点为中心或为焦点，主项在域 S 中的向量场具有特征轨线；域 S 由有限个子域 S_i 组成，主项在同一子域 S_i 中的场，在原点邻域内互相轨道拓扑等价. 域ZF 及 S_i 的边界均为代数流形.

注. 属于域ZF 及 S_i的判定，可由主项的明显条件加以陈述，写出此条件将是件非常复杂的事情. 特征轨线渐近性的主项计算也十分复杂[10, 11].

4.3 复合中心-焦点的第一焦点量.

定理. 对于满足 Løjasiewicz 条件的解析或光滑向量场 V，在适当选取半匀断时，其复合中心-焦点的单一变换$\Delta(V)$，常为半正则. 此变换之主项为线性.

定义. 单一变换 $\Delta(V)$ 主项系数的对数，称为复合中心-焦点的*第一焦点量*. 记之为 $F_1(V)$.

注. 值 $F_1(V)$ 不依赖于半匀断正则卡的选择. 一般说来，依赖于半匀断的选择. 但等式 $F_1(V)=0$ 则不依赖于作法的随意性.

推论. 为使场V 的复合中心-焦点成为中心，必需有$F_1(V)=0$.

对于解析向量场，上述定理的前一结论，看来 Dulac 已经知道.

4.4 问题. 设Γ是以原点为孤立奇点的某一平面向量的 Newton图. ZF是4.2款所说的域，则对于“几乎所有”场$V\in ZF$，

是否

a. 不等式 $F_1(V) \neq 0$ 成立？

b. 可用场的主项来计算 $F_1(V)$ 的值？

第二部分. **线性项出现中心的情形**

对此情形区分中心-焦点的计算，是个经典结果[24,26]. 以下用 В.И.Арнольд 提供的观点陈述此结果. 同一问题对于多项式系统也有过讨论. 4.6的材料将在后面用到. 首先介绍Арнольд引进的一般概念[3].

4.5 代数可解及解析可解的局部问题.

定义. 向量场 V 在原点的 N-jet是指向量场的一个类，其每一向量仅与 V 相差一个项 $O(r^N)$（r 表向径），记为 $V^{[N]}$. 类似地可定义函数 f 的 N-jet, $f^{[N]}$. 类 $V^{[N]}$ 中的向量场称为 N-jet $f^{[N]}$ 的一个表示.

正型、负型及中型 jet. 我们说，向量场在原点的 jet 具有某性质 A 或正型（相对于性质 A），若是其所有表示均具有性质 A. 类似地可定义负型 jet（相对性质 A）：jet 的所有表示均不具有性质 A.

称 jet 为中型，若是它既不为正型，也不为负型.

向量场在原点的所有 N-jet 的空间为一 n 维相空间，记为 $\mathscr{F}_{N,n}$. 向量空间中坐标的选择可用来在空间 $\mathscr{F}_{N,n}$ 中建立坐标系：每一 N-jet 对应于作为其表示为 N 次向量多项式系数的数组.

一个区分向量是否具有性质 A 的问题，称为是（依Арнольд）代数可解的，如果：

1. 对任一 N, N-jet 空间可被半代数地划分成（关于性质 A 为）正型、负型或中型的区域；也就是说，可用有限个代数方程和不等式来划分这些区域；

2. 当 $N \to \infty$ 时，中型 jet的集在空间 $\mathscr{F}_{N,n}$ 中的余维趋于 ∞.

类似地可定义解析可解问题，只要将上述条件中"代数"一词改成"解析".

4.6 线性项出现中心的情形. 解析向量场.

考虑右端为解析式的平面方程

$$\dot{x} = Ix + f(x), x \in (\mathbb{R}^2, 0),$$
$$f(0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0, I \text{ 为 } 90^\circ \text{旋转}. \tag{6}$$

定理. (6)的中心-焦点区分问题，为一代数可解问题.

今简述此定理之证明，因为它将用及今后需要的一些概念. 这个证明实际上是 А.М.Ляпунов 和 H.Poincaré[24,26] 经典研究的修正.

设 $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, F 及 g 分别是 x_1, x_2 及 r^2 的不定系数形式幂级数，设 $F = \sum_{n=2}^{\infty} F_n$, F_n 是 n 次齐多项式，$F_2 = r^2$. 以 $\bar{F}_n(r)$ 表示多项式 F_n 在半径为 r 的圆周上的平均值，以 $\bar{F}(r)$ 记形式级数 $\sum \bar{F}_n(r)$. 再设 $g = \sum_{n=2}^{\infty} g_n r^{2n}$.

引理1. 对任一(6)形之场，方程

$$(\nabla F, V) = g \tag{7}$$

在形式级数类中可解.

在附加条件 $\bar{F} \equiv 0$ 下，方程(7)的解唯一.

证明. 当 $n > 2$ 时，形式 F_n 可由下面的方程就 n 递推得出

$$(\nabla F_n, Ix) = g_{n/2} r^n + G_n, \qquad n \text{ 为偶数};$$
$$(\nabla F_n, Ix) = G_n, \qquad n \text{ 为奇数}.$$

n 次齐多项式 G_n 为已知：它由 $k<n$ 的形式 F_k 表示. 方程左端是 r 固定时的偏导数 $\frac{\partial F_n}{\partial \varphi}$ (φ 表示极角). 当且仅当右端沿任一圆周的均值为零时，方程可解. 对于奇值 n，此条件自动满足；对于偶值 n，均值与 gr^n 成正比，故在适当选择 $g_{n/2}$ 时，可使之为零. 而均值为零的函数 F_n 可被其导数 $\frac{\partial F_n}{\partial \varphi}$ 唯一地确定，是所欲证.

注意，值 g_n 是 V 的不高于 $n-1$ 次项的 Taylor 系数的多项

式.

定义[1]. 多项式 g_{n+1} 称为实现中心的第 n 个障碍量.

引理2. 具线性项 Ix 的场V的$2n-\text{jet}\dot{V}^{(2n)}$,当且仅当前$(n-1)$个障碍量为零时,为中型的. 反之为负型的,此时无中心.

事实上,设 $g_1=g_2=\cdots=g_{n-1}=0\neq g_n$, 这时多项式 $F^{(2n)}=F_2+\cdots+F_{2n}$, 当 $g_n<0$ 时,是场V的 Ляпунов 函数(原点为渐近稳定). 当 $g_n>0$ 时,是场 V 的 Четаев 函数(原点不稳定),这是因为

$$(\nabla F^{(2n)},V)=g_n r^{2n}+O(r^{2n}).$$

因此,若 $\text{jet}V^{(2n)}$为中型的,则前 $n-1$ 个障碍量为零. 反过来的结论可同法证之.

引理 2 给出 jet为中型的代数判定,从而定理得证.

4.7 线性项出现中心的情形. 多项式向量场[2].

以原点为奇点,线性部分为 Ix 的 N 次平面多项式向量场,其空间记为 A_N. 此空间与相应系数空间恒同. 对每一场 $V\in A_N$, 定义其障碍量$g_2, g_3, \cdots$; 当且仅当它们同时为零时,场V出现中心. 根据 Hilbert 的基定理,代数方程的无限组

$$g_2=g_3=\cdots=g_k=\cdots=0$$

等价于一有限组. 因此多项式向量场的中心-焦点区分问题,相当于写出这个有限组.

归纳地计算障碍量 g_k 本质上无大困难[3]. 但下述问题的答案完全不清楚: 为保证中心条件,应使前面多少个障碍量为零? 从一般性的讨论,甚至尚不知道此数是否小于 $\dim A_N$.

仅对 $n=2$ 时,有了一个意料不到的简单答案. Dulac[38]计算了前三个障碍量(每一个在前面各量为零的情况下)后断定,若此等障碍量均为零,则方程可积,有中心.

---

1) 第 n 障碍量与第 n Ляпунов 焦点量有同样意义.

2) 有关二次向量场的历史及现状,其有关知识请见[29].

3) 但在实践上却有很大困难;即使对于$N=3$对,在 EC-1020 计算机上,尚未标出多于五个障碍量时,容量已显不足.这件事本不足为怪:即使使用较前更为经济的方法,第五障碍量为一十四个变量的十次齐多项式.

4.8 附录. 复合奇点情形.

定理([19]). 复合奇点的中心-焦点区分问题，为代数不可解.

理由如下，考虑无例外方向的向量场的类. 对此种向量场，其方程 $\dot{x}=V(x)$ 写成极坐标形式时，在圆 $r=0$ 上无奇点. 新方程 $\frac{dr}{d\varphi}=f(r,\varphi)$ 的右端在域 $r>0$ 处可解析延拓，如方程 $\dot{x}=V(x)$ 无例外方向，则必有中心. 其时在圆 $r=0$ 的邻域中存在方程 $\frac{\partial r}{\partial\varphi}=f$ 的全纯首次积分，它当 $r=0$ 时为零. 此积分的最低项以非解析超越方式依赖于场 V 的 Taylor 系数；这就构成问题的代数不可解性.

遗补. 高维相空间奇点的拓扑分类问题

Арнольд 发现，全纯向量场奇点的Ляпунов稳定性问题，在三维空间上是代数不可解的. 为证明此点，Арнольд 构造了一族 jet，它代数地依赖于三个参数，且与中型 jet 的集交得一个非代数集. 此种族实际上是"非常退化"的，因为它在相应的 jet 空间中的余维是一百.

Арнольд 的结果又在[33]及[31]中得到加强. 在两文中作出两个余维为三的族；此种族在研究具有共振线性项的向量场奇点的稳定性时，十分频繁地出现；即设 A 及 B 是空间 $\mathscr{T}_{3,4}$ 中的两个族，由其线性项的谱分别是 $\pm i$；$\pm 3i$ 及 $\pm i$，$\pm i$ 的向量场的 3-jet 组成. 向量场的非线性项为任意的.

定理. 族 A 及 B 的每一个与稳定 jet 的集的交不为半代数集；此族的稳定性边界不能由代数方程及代数不等式给出.

"稳定"一语系指"Ляпунов 稳定性".

在[4]中，Арнольд 又指出如下的猜测：

"可以期望，稳定性边界——它破坏半代数性，且无更多的约束——在集合论的范畴中将是一种病态的表现. 例如，在阶数固定的 jet 空间的有限维代数子流形中，稳定 jet 的集合，也许可以有

无限多个连通分支，甚或连同它的补集同时为稠集”.

Арнольд 指出的病态之一，今天已被发掘出来；在jet的$\mathcal{F}_{5,5}$空间中指出一个单参代数族，它与稳定集的交，跟可数区间上的不稳定jet一样；而对中型jet的集，则跟可数点集一样；后者向族的点之一结聚. 另一些较弱的结果已经发表于[20].

定理. 解析向量场奇点的 Ляпунов 稳定性问题及拓扑分类问题，为代数不可解.

充分性与不充分性. Арнольд又发现[1,18]，解析函数在临界点的芽，具有如下的所谓充分性.

定义. 解析函数在临界点的jet称之为具有充分性，若是此jet的所有表示均解析等价——即彼此可用解析坐标的代换代换之.

定理. 全纯函数在空间$\mathbb{C}^n$的临界点处的芽，其jet常具有充分性.

F.Tankes[49] 证明，类似结果对于实空间中的光滑(但非解析)向量场已经不再成立；即使代替解析性而用轨道拓扑等价时也如此. Tankes 在空间$\mathbb{R}_3$的原点处作出这样一个 4-jet，它的任一表示V总有在原点处为零的尾部，使得在原点任一邻域内改变场V的轨道拓扑型.

第二章　解析正则形

§1.　向量场化为线性正则形

本章仅涉及解析向量场.

1.1　**正则级数的收敛与发散.**

先回忆几个熟知定义.

定义. 数组 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n$ 称为是共振的，若是存在 $k\in Z_+^n$，使当 $|k|\geqslant 2$ ($|K|$ 定义为 $|K|=k_1+k_2+\cdots+k_n$) 以及 $j\in\overline{(1,n)}$ 时，有 $(\lambda,k)-\lambda_j=0$.

共振数组有时简称"共振组".

定义. 数组 $\lambda\in\mathbb{C}^n$ 称属于 Poincaré 域，若是向量 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 在复平面上的凸包不包含零点；反之，称 λ 属于 Siegel 域. 数组 $\lambda\in\mathbb{C}^n$ 又称属于强 Siegel 域，若是向量 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的凸包含有原点的一个邻域.

一个线性向量场称为属于 Poincaré 域 (或属于 Siegel 域)，若是相应的线性算子谱属于 Poincaré 域 (或属于 Siegel 域). 类似地可定义强 Siegel 的 (及共振或非共振的) 线性向量场或线性微分方程.

Poincaré 定理 ([46]) 在奇点处具有 Poincaré 型非共振线性部分的解析向量场，在此奇点的某一邻域中与其线性部分解析等价.

这个定理有一个十分重要的形式模拟，也属于 Poincaré.

定理. 在原点处具有非共振线性部分的解析向量场与其线性部分形式等解.

将向量场变成其线性部分的形式代换，称为可正则化代换或可正则化级数.

具有Siegel线性部分的解析向量场首先是Siegel研究的[18]，以后，他的定理又为 V.И.Арнольд 及 А.Брюно所改进．以下在较简单和较弱的条件下陈述 Брюно 定理．

简记

$$\mathcal{Y}=\{(k,j)\in\mathbb{Z}_+^n;\ j\in\overline{(1,n)},\ |k|\geqslant 2\};$$

以 e_j 表示空间 $\mathbb{C}^n$ 的第 j 个单位向量．

定义．数组称为Брюно不可约，若是存在正数 C及 ε，使对一切 $(k,j)\in\mathcal{T}$有$(\lambda,k)-\lambda_j\neq 0$者，成立

$$|(\lambda,k)-\lambda_j|>Ce^{-|k|^{1-\varepsilon}}.$$

注 所有Брюно不可约的$\lambda\in\mathbb{C}^n$之集，具有Lebesgue零测度．

Брюно **的收敛性定理**（[13]）．一解析向量场若其线性部分之谱非共振，且为брюно不可约，则必解析等价于其线性部分．

Poincaré 定理可用优级数法证明（如原始证明），也可用压缩映射法．值 $(\lambda,k)-\lambda_j$，$(k,j)\in\mathcal{T}$出现在正则化级数 Taylor 系数表达式的分母之中．若 λ 属于 Poincaré 域内，则此值异于零，这就使 Poincaré 定理的证明略显简单；若 λ 落于 Siegel 域内，则值 $(\lambda,k)-\lambda_j$ 的平均值将任意小．Siegel 定理最初的证明便是用到了小分母甚少出现这一现象．Арнольд 加强了 Siegel 定理，并用 Newton-Колмогоров 方法加以证明．同法也被用于证明 Брюно 定理．

现在讨论有关正则化级数的发散性问题．

定义．数组 $\lambda\in\mathbb{C}^n$ 称为几乎共振的，若是级数

$$\sum_{\mathcal{T}}\frac{z^k e_j}{(\lambda,k)-\lambda_j}$$

对一切 $z\in\mathbb{C}^n-\{0\}$ 为发散的．

等价定义．数组 $\lambda\in\mathbb{C}^n$称为几乎共振的，若是对任何 C及σ，存在一个可数集$\mathcal{T}'\subset\mathcal{T}$，使得对一切$(k,j)\in\mathcal{T}'$，不等式

$$|(\lambda,k)-\lambda_j|>Cl^{-\sigma,|k|}$$

不再成立．

Брюно **发散性定理**([13]). 对每一个具有几乎共振谱的线性向量场[1) $\mathbb{A}$,存在一个尾部 f,使任一将场 $\mathbb{A}+f$ 化为线性正则形的形式级数,均为发散的.

此定理说明,Брюно 不可约条件近乎必要条件.

1.2 正则化级数发散性的分析解释.

将向量场化为已知正则形的问题常导致所谓共轭问题：求一代换，将某一给定向量场或给定映射化成另一个. 将非线性向量场 $\mathbb{A}+f$ 化为线性场 $\mathbb{A}$ 的代换 H,必定满足泛函方程

$$H_*\cdot\mathbb{A}=(\mathbb{A}+f)\cdot H.$$

此方程与所谓 $h(h=H-id)$ 的同调方程密切相关：

$$Ah-h_*\mathbb{A}=f,$$

其中 f 及 h 为向量. Брюно 定理的证明,与许多别的共轭问题的解决一样,其根据是下面的等效原理：用于求解函数方程的 Newton-Колмогоров 方法,当且仅当相应同调方程的解收敛,且能很好地用右端进行估计时,为收敛的.

上述同调方程可用初等方法解出;如

$$f=\sum f_k^j z^k e_j,$$

则

$$h=\sum\frac{f_k^j z^k e_j}{(\lambda,k)-\lambda_j}.$$

若数组 λ 为几乎共振的，而系数模被估计为优于一个几何级数,则同调方程的解在零点以外处处发散，为证明 Брюно 的发散性定理,可选择这样的尾部 f 及 g,使得以 g 为右端的同调方程的解发散. 此外,令级数 f 充分下沉,使从右端为 f 的函数方程的解之收敛性,推出右端为 g 的同调方程的解之收敛性;但后一情况为不可能的.

Арнольд 推测([5]), 线性项具有几乎共振谱的向量场，其可正则化级数的发散性应是正常现象，而收敛性才是例外情况.

---

1) 以下以 $\mathbb{A}$ 表示线性算子 A 给出的线性向量场.

这个推测已被下面定理证实(此定理不足之处是，不能明确指出一个具有发散正则化级数的向量场)。

定理([21])．设 $\lambda\in\mathbb{C}^n$ 为一几乎共振数组，尾部 f 的 Taylor 系数的模可被估计优于一个几何级数，则对(Lebesgue 意义下的)几乎所有 $t\in\mathbb{C}$，方程

$$\dot{z}=(\operatorname{diag}\lambda)z+tf(z)$$

的可正则化级数为发散的。

1.3 发散性的几何定理.

当线性部分的谱病态地靠近可数个共振时，对于把向量场化为线性正则形的正则化级数的发散性，Арнольд 设想了一种几何解释的方案；发散性的几何原因是由于本质共振的出现；详情如下。

我们考虑向量场的一个族，其线性部分在取零参数值时，匀断地通过共振区的边界．当参数通过坐标平面的原点时，某一卡将被划分成一些解析流形，这些流形依赖于族的参数以及与这些参数值相应的方程不变量．此等流形的拓扑由算术共振确定．在这些流形上奇点的某一邻域中将出现一些“较大的块”，正是这些“大块”阻碍了在此邻域内将方程化为线性正则形．如果数组 $\lambda\in\mathbb{C}^n$ 病态地靠近可数个共振数，则在方程

$$\dot{z}=(\operatorname{diag}\lambda)z+f(z)$$

奇点的每一邻域内(尾部 f 具有一般位置)，具有可数个不变流形．每一这样的流形将在共振之一近于 λ 而本质化时出现；也就是说，正是这些流形在原点某一邻域中阻碍了正则化级数的收敛性。

这个方案最初由 А.С.Пяртли[27,28]对复平面上的方程作过讨论．本质共振以及与之相关的正则化级数发散性的一般研究已为 Пяртли 及本文作者[23]研究过．关于本质共振的某些定理也可以从 Брюно 开展的一般理论推出，其结果已包括在[14,15]之中。

§2. 非线性正则形

本节及下节包括三方面内容：全纯向量场及映射的形式分类；形式分类与解析分类的关系；轨道解析分类。三者之中，唯有第二个问题已有较完善的答案.

2.1 形式正则形.

具有共振线性部分的全纯向量场，它在奇点处的芽可以用形式代换化成一仅含共振项的正则形. 这种正则形还可以进一步化简，因此以后将称之为预设形. 现在给出精确定义.

定义. 设 $\lambda\in\mathbb{C}^n$ 是共轭数组. 向量幂 $W^k e_j$ ($W\in\mathbb{C}^n$, e_j 表空间 $\mathbb{C}^n$ 第 j 个单位向量，$k\in\mathbb{Z}_+^n$, $|k|>1$) 称为共振项，如有

$$\lambda_j=(\lambda,k).$$

定理. 具有共振线性部分的全纯向量场

$$v(z)=Az+f(z), \tag{1}$$

$$A=\operatorname{diag}\lambda,\ \lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\ f(0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial z}(0)=0,$$

它在空间 $\mathbb{C}^n$ 的原点处的芽，可用形式坐标代换化成预设正则形，即尾部仅含共振项的向量形式级数.

类似定理对映射亦成立.

定义. 数组 $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n)\in\mathbb{C}^n$ 称为多重共振的，如果对某个 $j\in(\overline{1,n})$ 及 $k\in\mathbb{Z}_+^n$ 成立等式 ($|k|>1$)：

$$\nu_j=\nu^k.$$

设 $\nu\in\mathbb{C}^n$ 为多重共振的，则向量幂 $W^k e_j$ (k 及 j 同前)，当 $\nu_j=\nu^k$ 时，称为多重共振项.

定理. 全纯映射在不动点处的芽可用形式坐标代换化成预设正则形，即尾部仅含多重共振项的向量形式级数.

前一定理的证明已辑于 Арнольд 的书[7]中；后一定理证明相仿.

例子. 下面的图表说明，预设正则形犹可用形式代换大为化

简．此表中 V 是向量场在 $(\mathbb{C},0)$ 的芽，f 是映射 $(\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C},0)$ 的芽，又 $\nu=\exp\dfrac{2\pi p}{q}$，$p,q\in\mathbb{Z}$．芽 f 的尾部额外要求它有一般位置．

芽	预设正则形	最终正则形
1．$v(z)=z^2+az^3+bz^4+\cdots$	$v(z)$	$\tilde{v}(z)=z^2+az^3$，
2．$f(z)=z+\alpha z^2+\cdots$，$\alpha\neq0$，	$f(z)$	$\hat{f}(z)=z+z^2+az^3$
3．$f(z)=\nu z+\cdots$，	$\hat{f}(z)=\nu z+\sum c_m z^{qm+1}$	$\hat{f}(z)=\nu z+z^{q+1}+az^{2q+1}$

注1． 如映射 $z\mapsto z+\alpha z^2+\cdots$ 在 z^2 项有非零系数，则此系数可用相似变换化成1．

注2． 设 f 为例3的映射，则合成映射 f^q 有形状

$$f^q:\ z\to z+c_1z^{q+1}+\cdots$$

假定 $c_1\neq0$．这就是映射 f 尾部的一般位置要求．

注3． 各例中的数 a 便是形式分类的模，不同值 a 的正则形不形式等价．

下面定理是有关例1正则形式的结论的自然推广．

定理（[16]）．线性部分具有单重共振谱的全纯向量场 V 在奇点处的芽，形式等价于多项式向量场 $\tilde{V}$，只要场 V 的尾部满足下述一般性位置要求即可，设

$$\phi(z)=\Lambda z+zg(z),$$

$$\Lambda=\mathrm{diag}\,\lambda,\ \lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\ z=\mathrm{diag}(z_1,z_2,\cdots,z_n)$$

是 V 的芽的预设正则形．设 λ 中所有共振关系由下式产生：

$$(\lambda,r)=0．$$

则 v 的一般位置要求是

$$(g(z),r)\neq0．$$

此外，除去余维为无限的情形，具有单重共振的全纯向量场的形式分类有有限个模．对于二重共振情形，此结论不真．

2.2　Брюно 的条件 A：形式分类与解析分类的关系．

以原点为奇点的向量场的芽空间中作用两个群：形式变量代

换及解析变量代换[1]. 前一作用的含芽 v 的轨道记为 $O_{F}v$，另一记为 $O_{A}v$.

对芽的线性部分加上不太强的限制后，Брюно 完全解决了下面问题：轨道 $O_{F}v$ 及 $O_{A}v$ 相重合的充分必要条件是什么？

答案是 Брюно 的条件 A；对场的线性部分加上一些限制，便可对此条件作一较简单的陈述.

(1) $A = \operatorname{diag}\lambda$，数组 λ 为共振. 这正是我们现在感兴趣的情形(非共振性已于上段作过分析)；

(2)数组 λ 为Брюно 不可约(见 1.1 款)；

(3)数组 λ 为严格 Siegel 的 (即原点严格位于集 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ 的凸包之内)；或者

(3a) 所有数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 位于一条过原点的直线上，但不得同在原点的同一侧.

以 $K(\lambda)$ 表示锥

$$K(\lambda) = \{r \in R_{+}^{n} | (r, \lambda) = 0\}.$$

条件 A 可分几步陈述.

1. 具有预设正则形的全纯向量场的芽 v，如果对任一向量 $r \in K(\lambda)$，场 V 与叶层 $z^r = \text{const}$ 的叶相切，则它满足条件 A.

此条件又可以下面方式借用形式级数加以陈述. 设全纯向量场 V 的芽具有预设正则形，且满足条件 A，则

$$V(z) = Az + zg(z)，又 (r, g(z)) \equiv 0，对每一 r \in K(\lambda). \quad (2)$$

2. 形式向量场写成预设正则形后，如满足要求(2)，则满足条件 A.

3. 全纯向量场的芽，若至少有一预设正则形满足条件 A，则称为满足条件 A.

Брюно 定理 ([13]). 在对芽 v 的线性部分作上述假定后，

---

1) 并非对每一形式代换，全纯向量场的芽的像也为全纯；形式代换在作用于全纯向量场的芽时，唯有所得向量形式级数收敛时，才有定义. 这就使我们能讨论形式代换群在全纯向量场的芽空间中的作用，以及此作用的轨道.

当且仅当芽 v 满足条件 A 时，轨道 $O_v V$ 及 $O_A V$ 重合．

其次，若芽 v 至少有一预设正则形不满足条件 A，则任一将场 V 化成预设正则形的形式代换必发散．

注．对于线性部分谱属于 Poincaré 域且为共振时的向量场，其预设正则形为一向量多项式，且正则化代换恒收敛（Dulac）．

Брюно[13] 给出条件 A，且对于向量场线性部分的谱位于 Siegel 域的边界的情形，证明了上述定理．但此事讨论极为复杂，兹从略，条件 A 的几何解释属于 Martinet[44]．

Брюно对于映射芽也发展了相应理论，我们不再详述，但只指出一点：映射

$$f: \ z \mapsto \nu z + az^2 + \cdots,$$

$$\nu = \exp\left(2\pi i \frac{p}{q}\right), \ p, q \in N,$$

满足条件 A 的充要条件是 $f^q = id$，这时不难证明，映射 f 与其自己的线性部分解析等价．

2.3 发散性定理的评注．

设向量场 $A + f$ 有形式正则形 $A + f$．这时正则化级数 $H = id + h$ 满足泛函方程

$$H_*(A + \psi) = (A + f) \circ H;$$

此方程又与同调方程

$$[A + \psi, h] = g$$

密切相关．

Брюно用下面办法证明了发散性定理：作出具有下面性质的级数 $\tilde{f}$ 及 g：

1．级数 $\tilde{f}$ 及 g 充分下沉，使得能从右端为 $f = \tilde{f} + g$ 的泛函方程收敛解的存在，推出右端为 g 的同调方程收敛解的存在；

2．右端为 g 的同调方程没有收敛解．

Брюно所作的发散性的例，带有非常特殊的特征．Арнольд[5, p173] 告诉我：若能证明，在条件 A 破坏时，正则化级数的发散性属正常现象，而收敛性为例外情况，则正则形理论将有较

具体的格式．这件事情在[22]中已有讨论．

§3．非 Hausdorff 黎曼面
与向量场（映射）芽的泛函不变量

3.1 解析分类问题．

Брюно 理论并未涉及下面的两个问题：

1．对于单个向量场的芽，怎样才能说清楚它是否解析等价于它自己的预设正则形？

轨道 $O_r v$ 不满足条件 A 这件事，可用加于级数 v 的 Taylor 系数的有限个代数运算来表达．但自然，轨道 $O_r v$ 与 $O_A v$ 的不重合，还不能推出原始芽 v 的正则化级数的发散性．

上述问题是下面问题的特款．

2．区分群 A_n 轨道的不变量完全组是什么？换言之，具有共振线性部分的解析向量场，其芽的解析分类是什么？

目前这些问题刚被研究．Martinet 在[44]中宣布[1)]，对于线性部分恰有一个非零特征值的情形，他已经知道$(\mathbb{C}^2, 0)$上向量场芽的轨道解析分类．以下我们讨论复平面鞍型共振向量场的轨道解析分类．（即指这样的场，其线性部分特征值有负的有理比）．这一分类主要依据 С.М.Воронин 及本文作者的结果，这将在下两节中讨论．

3.2 非 Hausdorff 黎曼面．

非 Hausdorff 流形通常在拓扑学及黎曼曲面理论中不作讨论．但在今后解释解析分类问题时，却起着关键作用．

定义． 二维拓扑空间 M 称为（非 Hausdorff）黎曼面，如果它具有复结构．也就是说，对空间 M 的每一点存在邻域 U 及映射 $U\to\{|z|<1\}$；又两个这样的邻域之间的转换函数为全纯．

1）不久前已经发表：J.Martinet J.P.Ramis [45]．其中利用了 Ecalle 的前驱工作（见[41]及索引）．

就常规而言，上述陈述初看似乎定义了一个病态对象.

例1. (本例实的模拟可见 Hirsch 的书[32, p241])、设 M 是 $(\mathbb{C}\times 0)\cup(\mathbb{C}\times 1)$ 将 $(z,0)$ 与 $(z,1)$ 迭合得到的空间 (对一切 $z\neq 0$). 则 M 为一非 Hausdorff 黎曼面，称之为具有两个零点的复直线.

例2. 设 K 是平面 $\mathbb{C}$ 上的开单位圆，φ 是圆 K 映上自身的线性分式变换. 设 M 是 $(\mathbb{C}\times 0)\cup(\mathbb{C}\times 1)$ 将 $(z,0)$ 与 $(\varphi(z),1)$ 迭合得到的空间(当 $z\in K$ 对). 而 M 的复结构由并 $(\mathbb{C}\times 0)\cup(\mathbb{C}\times 1)$ 的复结构兼承之. 则 M 为一非 Hausdorff 黎曼面；点 $(z,0)$ 及点 $(\varphi(z),1)$ 相异但不可分隔.

作为一维复域 Ω 关于双全纯映射 f: $\Omega\to f\Omega$ 的作用的商空间，我们又遇到非 Hausdorff 黎曼面.

例3. 考虑域

$$\Omega=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|>1\}$$

关于单位位移映射的作用的商空间；点 z 与 $z+1$，当且仅当它们属于 Ω 时迭合. 这个商空间是由挖去点 0 及 ∞ 的两个球面的并集 $(\mathbb{C}^*\times 0)\cup(\mathbb{C}^*\times 1)$，取点 $(z,0)$ 与点 $(z,1)$ 的迭合得出，其中 $|z|<R_1$，$|z|>R_2$，且 $R_2>R_1$.

注. 粘合圆半径的值依赖于有孔球面上卡的选取.

定义. 对于以原点为奇点的全纯向量场 V，以 g_V^1 表示沿其相曲线的单位位移. 映射 g_V^1 称之为流的嵌入，或简称嵌入.

例4. 挖去零点的单位圆关于映射 $g_{z^2}^1$ 的作用的商空间；其中 $g_{z^2}^1$ 意义同前.

事实上，将场 z^2 平直化的微分同胚 $z\mapsto t=-\dfrac{1}{z}$ 使映射 $g_{z^2}^1$ 成为单位位移；而去孔单位圆在例 3 的域 Ω 中.

此例还可进一步推广.

定理(Воронин([17])). 原点的去孔邻域关于映射

$$f:\ z\mapsto z+z^2+az^3+\cdots \tag{3}$$

作用的商空间，由并集 $(\mathbb{C}^*\times 0)\cup(\mathbb{C}^*\times 1)$ 施行粘合变换得到.

粘合映射 φ_+ 及 φ_- 为全纯，且分别在点 0 及点 ∞ 的不交邻域 U_+ 及 U_- 中定义；$\varphi_+(0)=0, \varphi_-(\infty)=\infty$. 当 $z\in U_+\setminus 0$ 时，点 $(z,0)$ 与点 $(\varphi_+(z),1)$ 粘合；当 $z\in U_-\setminus\infty$ 时，点 $(z,0)$ 与点 $(\varphi_-(z),1)$ 粘合.

映射(3)在零点的芽单值地确定 φ_+ 及 φ_- 分别在 0 及 ∞ 点的芽.

今以 A 记所有(3)形的芽的集合.

注. 若在有孔球面 $\mathbb{C}^*\times 0$ 及 $\mathbb{C}^*\times 1$ 上给定卡，则映射 φ_+ 及 φ_- 成为解析函数. 不同的卡对应于不同的函数；并且，在挖去两点(其一坐标为 0，另一坐标为 ∞)的球面上的两个卡，彼此仅差一个因子.

定义. 保角映射偶 φ_+: $(\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C},0)$ 及 φ_-: $(\mathbb{C},\infty)\to(\mathbb{C},\infty)$ 的芽之集记为 I. I 中两个偶 (φ_+,φ_-) 及 (ψ_+,ψ_-) 称为是等价的，若是存在线性映射

$$\lambda \text{ 及 } \nu: \mathbb{C}\to\mathbb{C},$$

使有

$$\varphi_+\circ\lambda=\nu\circ\psi_+, \varphi_-\circ\lambda=\nu\circ\psi_-.$$

推论. 形如(3)的每一芽 f 对应于等价偶 $(\varphi_+,\varphi_-)\in I$ 的类，称之为芽 f 的**泛函不变量**，记为 μ_f.

3.3 具有恒等线性部分的映射 $(\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C},0)$ 芽的解析分类.

定理[1]. 1. **不变性.** 类 A_2 的彼此为解析等价的芽的集合，单值地对应于 I 的等价偶的类.

2. **等模性与等价性.** A_2 的两个具有相同泛函不变量且互相形式等价的芽，为解析等价.

3. **实现.** 每一等价偶 $(\varphi_+,\varphi_-)\in I$ 的类，可作为类 A_2 的某一映射的不变量的实现.

---

1) 前三结论已在 Воронин 的工作[17]中证明；末一结论系 A. A. Щербаков 得到.

4. **解析等价**. 若类 A_2 的芽 f 解析依赖于有限个复参数，则不变量 μ_f 也解析依赖于这些参数.

泛函不变量可被用来分析相应映射的性质.

定理 (Воронин ([17])). 当且仅当不变量 μ_f 由带有所有 n 次单位根为因子的映射芽所组成时，类 A_2 的映射 f 的芽是类 A_2 的芽 g 的 n 次幂.

定理(Воронин([17])). 当且仅当相应泛函不变量由线性映射芽(今后称为平凡不变量)构成时，类 A_2 的映射为嵌入 (见 3.2 款).

3.4 具共振线性部分的映射 $(\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C},0)$ 的芽的解析分类.

这一段考虑映射

$$f:\ (\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C},0),z\mapsto\nu z+\cdots,\nu=\exp\left(2\pi i\frac{p}{q}\right) \tag{4}$$

的芽 (分数 $\frac{p}{q}$ 为不可约的)，其尾部附带有下面的一般位置要求：

$$f^q(z)=z+az^{q+1}+\cdots,\qquad a\neq 0.$$

这样芽的类记为 B_q.

定理(Воронин，本文作者). 1. 对于类 B_q 的芽，类似于上段的第一定理亦成立；只消改类 A_2 为类 B_q.

2. 设 $f\in B_q$，则当且仅当不变量 μ_f 为平凡时，芽 f^q 为嵌入.

3. 当且仅当不变量 μ_f 由带有所有 n 次单位根为因子的芽组成时，芽 $f\in B_q$ 与自身的预设正则形解析等价.

对于具有共振线性部分的映射 $(\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C},0)$ 的任意芽，也成立类似的，但稍为复杂的结果.

3.5 鞍形共振向量场的芽的轨道解析分类.

下面的结果利用了方程和映射的标准联系方法，即单一变换的方法，首先描述一类尾部具有“一般位置”(定义见后) 的向量场.

设 v 是下形向量场的芽

$$v(z) = \Lambda z + f(z), \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2),$$
$$f(0) = 0, \frac{\partial f}{\partial z}(0) = 0, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{q}{p}, \tag{5}$$

p 与 q 为互素自然数。已知方程

$$\dot{z} = V(z)$$

仅有两个在原点全纯延拓的解；它们在原点切于坐标轴，故可仿实的情形称之为分界线。不失一般性可认为，分界线与坐标轴 Oz_1 及 Oz_2 重合。

以分界线 Oz_j 上原点引出的正定向路径，对应于芽 v 的单一变换，或者说，对应于 v 的一个复后继函数，一如 И.Г.Петровский 与Е.М.Ландис 最初所定义的[25]. 记此函数为 Δ_j: $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. 简单的计算可知

$$\Delta_1'(0) = \exp\left(-2\pi i \frac{p}{q}\right);$$

$$\Delta_2'(0) = \exp\left(-2\pi i \frac{q}{p}\right).$$

因此映射 Δ_1 具有(4)的形状.

现在说明尾部 f 的一般位置要求.

定义. 对于鞍形共振向量场(5)的芽，如果其单一变换 Δ_1 属于类 B_q,我们就说此芽属于 $\tilde{B}_q$ 类.

注. 可以证明，由于定义的对称性(至少表面如此)，可知关系 $\Delta_1 \in B_q$ 蕴含 $\Delta_2 \in B_p$.

芽(5)的尾部 f 的一般位置要求是：$v \in \tilde{B}_q$.

定理. 对于类 $\tilde{B}_q$ 的向量场芽，与3.3段第一定理相仿的定理也成立；只消改解析等价为轨道解析等价，改类 A_2 的 f 而为类 $\tilde{B}_q$ 的芽 v.

这个定理易于从下面两个定理推出.

定理(П.М.Елизаров,本文作者). (5)形芽，当且仅当它与分界线 Oz_1 或 Oz_2 对应的单一变换为解析等价时，为轨道解析等价.

定理. 类 $\tilde{B}_q$ 的每一芽可以实现为某一右端属于 $\tilde{B}_q$ 的微分方程分界线 Oz_1 的相应单一变换.

对于类 $\tilde{B}_q$ 中的向量场,可以简单地解答 3.1 款中的第一个问题.

定理. 类$\tilde{B}_q$的芽,当且仅当相应不变量为平凡时,与自己的预设正则形为轨道解析等价.

这样,在一般情形下,将芽(5)正则化的级数的收敛性,单一变换是个障碍. 但注意,若是芽(5)满足条件 A,则单一变换解析等价于线性部分(这容易从 Брюно 的收敛性定理,以及 Martinet 形式下的条件 A 推出来).

参 考 文 献

〔1〕 Алексеев Б.В.,Применение ЗВМ к получению условий центра.V Всесоюзная конференция по качественной теории дифференциальных уравнений, Кишинев, 1980.

[1a].Арнольд В.И. Особенности гладких отображений.—УМН, 1968, т. 23, вып. 1, с. 3—44.

〔2〕 Арнольд В.И.—Функцион.анализ, 1969, т. 3, вып. 1, с. 1—6.

〔3〕 Арнольд В.И.—Вестник МГУ, сер. Мат. мех., 1970, № 2, с. 52—55.

〔4〕 Арнольд В.И. —Функцион. анализ., 1970, т. 4, вып. 3, с. 1—9.

〔5〕 Арнольд В.И.—УМН, 1972, т.27, вып 5, с.119—184.

〔6〕 Арнольд В.И.—Функцион.анализ, 1976, т.10, вып. 4, с. 1—12.

〔7〕 Арнольд В.И. дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978.

〔8〕 Баутин Н.Н, Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М., Наука, 1976.

〔9〕 Березовская Ф. С. Препринт. Пущино, ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1978.

〔10〕 Березовская Ф.С., Крейцер Г. П. Степенные асимптотики…Препринт, Пущино, ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1976.

〔11〕 Березовская Ф.С., Крейцер Г.П.Избранные алгоритмы…. Препринт, Пущино, ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1976.

〔12〕 Богданов Р. И.—Труды семинара им. И. Г. Петровского, 1979, вып.5.с.51—84.

〔13〕 Брюно А.Д.—Труды ММО, 1971, т.25, с. 119—262.

〔14〕 Брюно А.Д.—ДАН СССР, 1974, т.216, №2, с.253.
〔15〕 Брюно А.Д.Препринты № 97, 98 Института прикладной математики АН СССР. М., 1974.
〔16〕 Брюно А.Д.Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений, М., Наука, 1979.
〔17〕 Воронин С.М.—Функцион. анализ, 1981, т. 15,вып. 1, с. 1—17.
〔18〕 Siegel, C. L.and Moser, J.K., Lectures on Celestial Mechanics, Springer—Verlag, New—York., 1971.
〔19〕 Ильяшенко Ю.С—Функцион. анализ, 1972, т. 6, вып. 3, с. 30—37.
〔20〕 Ильяшенко Ю.С.—Матем.сб., 1976, т.99, № 2, с. 162—175.
〔21〕 Ильяшенко Ю. С.—Функцион. анализ, 1979, т. 13, вып. 3, с. 87—88.
〔22〕 Ильяшенко Ю.С.—Вестник МГУ, сер. мат., 1981, № 1, с. 10—16.
〔23〕 Ильяшенко Ю.С., Пяртли А.С.—Труды семинара им. И. Г.Петровского, 1981, вып.7, с.3—49.
〔24〕 Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л., ОНТИ, 1935.
〔25〕 Петровский И.Г., Ландис Е.М.О, числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где P и O—многочлены второй степени. —Матем.сб., 1955, т.37, № 2, с.209—250.
〔26〕 Пуанкаре А.О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.М.—Л., ГИТТЛ, 1947.
〔27〕 Пяртли А.С.—Функцион. анализ, 1972, т.6, вып.4, с.95—96.
〔28〕 Пяртли А.С.—Труды ММО, 1978, т.37, с.95—106.
〔29〕 Сибирский К. С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц Кишинев, 1976.
〔30〕 Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Мир, 1970.
〔31〕 Хазина Г.Г., Хазин Л.Г.Препринт № 112 Института прикладной математики АН СССР, М., 1977.
〔32〕 Hirsch, M.W., Differential to topology, Grad. Texts. Math.,Vol. 33, Springer, New-York, 1976.
〔33〕 Шноль Э.Э., Хазин Л.Г.Препринт № 45 Института прикладной математики АН СССР. М., 1977.
〔34〕 Bendixon I.—Acta Math., 1901, v.24, pp.1—88.
〔35〕 Bogdanov R.I.—Inv.Math., 1979, v.54, pp.247—259.
〔36〕 Briot C., Bouquet T.—J.Ecole polytechn. Paris, 1856, v.21, № 36, p.133—199.
〔37〕 Chaperon M. Theses, Paris, 1980.
〔38〕 Dulac H.—Bull. Sci.Math., 1908, s.2, t.32.

〔38a〕 Dulac H.—Sur les cycle limite.—Bull. Soc. Math. France, 1923, t.51, (Русский перевод: А. Дюлак, О предельных циклах, М. Наука, 1980).
〔39〕 Dumortier F.—J.Diff.Equ., 1977, V.23, pp.53—106.
〔40〕 Dumortier F.—Singularities of Vector Fields, Rio de Janeiro, Inst. de Mat.Pura e Apl., 1978.
〔41〕 Ecalle J.—J.Math.Pures et Appl., 1975, v.54, p.183—258.
〔42〕 Frommer, M., Math.Ann., 109(1934), pp.395—424.
〔43〕 Iliašenko Ju.S.—In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki, 1978.
〔44〕 Martinet J.—Sem Bourbaki, 33e annce, 1980—1981, No.564.
〔45〕 Martinet J., Ramis J.P.— Publication de l'Institut de Recherche Mathematiqu Avancée, Strasburg, Mai 1981.
〔46〕 Poincares H.These, Oeuvres, Paris, 1916.
〔47〕 Seidenberg A.—Amer. J. of Math., 1968, v.90, pp. 248—269.
〔48〕 史惢龄，中国科学，1980, Vol.23, no.2, pp.153—158.
〔49〕 Takens F.—In: Dinamical Sistems.N.Y.-Lond., Acad. Press Inc. 1973.
〔50〕 陈兰荪，王明淑，数学学报，1979, vol.22, pp.751—758.